5. JOCURI ÎN MAI MULT ETAPE 125

5.1. Strategii de comportare 125
5.2. Jocuri de ruinare 127
5.3. Jocuri stochastice 131
5.4. Jocuri recursive 137
5.5. Jocuri diferențiale 140
Probleme 148

6. TEORIA UTILITĂȚII 151

6.1. Utilitate ordială 151
6.2. Loterii 153
6.3. Colecții de bunuri 158
6.4. Utilitate absolută 160
Probleme 162

7. JOCURI DE DOUĂ PERSOANE CU SUMĂ ARBITRARĂ 163

7.1. Jocuri bimatriceale (necooperative) 163
7.2. Problema negocierilor 166
7.3. Amenințări 173
Probleme 177

8. JOCURI DE *n* PERSOANE 179

8.1. Jocuri necooperative 179
8.2. Jocuri cooperative 179
8.3. Dominare. Echivalență strategică ..... Normalizare 183
8.4. Nucleu. Mulțimi stabile 186
8.5. Modelul lui Édgeworth al pieței. Un ..... exemplu 195
Probleme 199

9. ALTE CONCEPTE DE SOLUȚIE PENTRU JOCURI DE n ..... PERSOANE 202

9.1. Valoarea Shapley 202
9.2. Mulțimea de negociere 208
9.3. ^-stabilitate 215
Probleme 217

10. MODIFICĂHI ALE CONCEPTULUI DE JOC 218

10.1. Jocuri cu un continuum de jucători 218
10.2. Jocuri fără plăți laterale 222
10.3. Jocuri In forma funcției de partiție 224
Probleme 233

ANEXĂ

A.l. Convexitate 234
A.2. Teoreme de punct fix 238
INDICAȚII PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR PROPUSE 239

BIBLIOGRAFIE..... 242
INDEX..... 248

CUPRINS

Prefață..... 5
Asupra fundamentelor teoriei jocurilor..... 7

1. Conceptul de joc..... 31

1.1. Noțiuni generale..... 31
1.2. Jocuri în forma extinsă..... 32
1.3. Strategii. Forma normală..... 35
1.4. Puncte de echilibru..... 37
Probleme..... 39

2. Jocuri de două persoane cu sumă nulă..... 41

2.1. Jocuri cu sumă nulă..... 41
2.2. Forma normală..... 42
2.3. Strategii mixte..... 44
2.4. Teorema minimax..... 46
2.5. Calculul strategiilor optime..... 55
2.6. Jocuri simetrice..... 62
Probleme..... 64

3. Programare liniară..... 67

3.1. Introducere..... 67
3.2. Dualitate..... 69
3.3. Rezolvarea programelor liniare..... 75
3.4. Algoritmul simplex..... 76
3.5. Algoritmul simplex (continuare)..... 82
3.6. Exemple..... 86
3.7. Jocuri cu restricții..... 92
Probleme..... 94

4. Jocuri infinite..... 98

4.1. Jocuri cu o mulțime numărabilă de strategii..... 98
4.2. Jocuri pe pătratul unitate..... 101
4.3. Jocuri cu nucleu continuu..... 102
4.4. Jocuri concav-convexe..... 106
4.5. Jocuri în timp..... 108
4.6. Dimensiuni mai mari..... 114
Probleme..... 121

Ilată de transfer (a utilității), 172

Semiimputație, 200
Soluție
— a negocierilor, 167
— admisibilă, 68
— de bază, 79
— Nash, 172
— simplă principală (a unui joc simplu), 200
Stabilitate intcrnă/cxternă, 189 <Ji-stabilitatc, 215
Strategie, 35
— de amenințare, 175
— de comportare, 126
— mixtă, 9, 45
— minimax, 13, 16
— optimă, 52
— pură, 8, 35
— staționară, 132
Structură de coaliții, 208
Suport (al unui joc de n persoane), 202 Suprafață terminală (a unui joc diferențial), 141

Tabel simplex, 79
Teorema
— alternativei pentru matrice, 49
— de punct fix a lui Brouwer, 238
— de punct fix a Iui Kakutani, 238

Utilitate
— absolută, 160
— ordinală, 151
— funcție de utilitate, 155
— axiomele utilității, 151

Valoare
— a unui joc matriceal, 51
— maxiinin (a unui joc bimatriceal), 167
— Shapley (a unui joc de *n* persoane), 203 Variabilă
— ecart (de egalizare), 77
— de bază, 79
— secundară, 79
— de control/coinandă (intr-un joc diferențial), 141
— minimax, 22, 47
Transfer rate

Semi-impulation

Bargaining solulion
Feasible solulion
Basic solulion
Nash solution

Na in simple solution
Internal/external stability (p-stability
S tratcgy
Threat strategy
Behavioral strategy
Mixed strategy
Minimax strategy
Optimal strategy

Stationary strategy
Coalition structure
Carrier

Terminal surface

Simplex tableau

Theorem of the alternative for malrlces Brouwer's fixed point theorem Kakutani's fixed point theorem
Minimax theorem

Absolute utility Ordinal utility
Utility function Utility axioms
Jocuri
— izomorfe, 184
— echivalente, 184
Jucător

Valu

Slack variable
Basic variable
Nonbasic variable

Control

— discriminat, 190
— mai tare (decit alt jucător), 212
— slab (Intr-un joc cu colc-păr| i), 216

Legea cișligului diminuat, 159
Lema Farkas, 53
Loterie, 153
Lungime (a unui joc), 39

Mul| ime
— a unui jucător, 32
— de negociere, 211
— convexă, 234
— de informație, 32
— discriminatorie, 190
— stabilă, 27, 189

Nod (vîrf) al unui graf, 32
Normalizare (0, 1) a unui joc, 185, 219 Nucleu al unui joc pe pătratul unitate, 102
Nucleu al unui joc de *n* persoane, 25,

Obiec|ie, 210

Parteneri (ai unei coali(ii), 210
Partidă, 9
Pas pivotai, 80
Pivot, 80
Plată laterală, 15, 160
Preț-umbră, 159
Problema fluxului (intr-o rețea), 95
Problema negocierilor, 167
Program (problemă de programare)
— liniar, 67
— dual, 69
— consistent, 70
— nemărginit, 70
— nedegenerat, 83
Punct de echilibru, 20, 37
— pentru jocuri matriceale, 22,13
— pentru jocuri bimatriceale, 161
— pentru jocuri de *II* persoane, 20,37

Punct extrem (al unei mulțimi), 237 l'unet șa, 22,13
Isomorphic games
S-cquivalent gaines
Player
Uiscriminated player
Stronger player
Weak player

Law of diminishing relurn
Farkas' lennna
Lotlcry
Length

Player set
Bargaining set
Convex set
Information set Discriminatory set Stablc set

Nodc (verlex) (0, 1) normalizalion

Kcrnel 186 Corc

Objeclion

Parteners (of a coalilion) Play
Pivot step
Pivot
Side paymcnt
Shadow price
Thc flow problem
The bargaining problem

Linear program
Dual program Feasiblc program
Unboundcd program
Nondegencrate program
Equilibrium point

Extreme point Saddle-point

Echivalență (strategică), 184
Ecuația fundamentală (a unui joc diferențial), 143
Ecuațiile cinematice (ale unui joc diferențial), 141
Ecuațiile traiectoriei, 114
Exces (al unei coaliții), 212

Forma extinsă (a unui joc), 8, 32
Form(normală (a unui joc), 9, 36
Funcție
— caracteristică (a unui joc de n persoane), 24, 181
— convexă, concavă, 234
— de bună-slare socială, 162
— de clștig, 32
— de partiție, 225
— de repartiție, 101

Informație completă, 34
Impulație, 182, 219, 225
Isbcll, 160
Izomorfism (intre jocuri), 184

Joc
— antagonist, 21, 41
— bimatriceal, 9, 163
— Blotto, 139
— cooperativ, 23, 163
— concav-convex, 106
— cu cote-părți, 216
— cu informație completă, 34
— cu memorie incompletă, 127
— cu un conlinuum de jucători, 218
— cu sumă constantă, 182
— cu sumă nulă, 9, 41
— de două persoane, 41. 163
— de *n* persoane, 9. 179
— de ruinare, 127
— decompozabil, 37
— esențial/neesențial, 183
— fără plăți laterale, 17, 223
— finit, 9
— fictiv, 61, 66
— In forma funcției caracteristice, 181
— In forma funcției de partiție, 225
— in forma extinsă, 8, 32
— in forma normală, 9, 36
— In timp, 109
— matriceal, 9
— normalizat (0, 1), 185
— propriu/impropriu, 182
— recursiv, 138
— simetric, 186
— simplu, 186
S-cquivalence

Main cquation

Iiinematic equalions Path equations Excess

Extensive form
Normal form

Characteristic function
Convex, concave function
Social welfare function
Payoff function
Partition function Cumulative distribution function

Perfect information
Imputation

Isomorphism

Game
Slrictly competitive game
Bimatrix game
Blotto game
Cooperative game
Concave-convcx game
Quola game
Game wilh perfect information
Game with imperfect recall
Game for a conlinuum of playcrs Constant — sum game
Zcro-sum game
Two-person game /i-person game Game of cxhauslion

Esscntial/inessential game
Game without side payments
Finite game
Fictious play
Game in characteristic function form
Game in partition function form
Game in extensive form Game in normal form
Game of timing
Matrix game
Game in (0, 1) normalization
Proper/improper game
Recursive game

Symmetric game
Simple game

INDEX*[1]
ȘI VOCABULAR ROMÂN-ENGLEZ

Acoperire convexă (a linei mulțimi), 235 Convex liull
Algoritmul simplex, 75 Simplex algoritlun
Amenințare, 173 Tlireat
Arborele jocului, 32 Game trec
Axiomele lui Nash, 168 Nash's axioms
Axiomele lui Shapley (pentru valoarea unui Sbaplcy's axioms joc de *n* persoane), 203

Brouwer (teorema de punct fix), 238 Bun,
— liniar transferabil, 160
— separabil, 159
— total substituibil, 159

Brouwer's fixed point llieorcm Commodily
Jinearly transfcrable separable grossly subsl itutable

Cișlig, 31
— terminal/integral (intr-un joc diferențial), 141
Coaliție, 181
— efectivă (pentru o imputație), 000 Colecție de bunuri, 158
Combinație convexă, 235
Compunerea jocurilor simple, 200
Configurație de clștiguri, 208
— coaliționat rațională (c.c.c.r.), 209
— individual rațională (c.c.i.r.), 209 Contraobiecție, 210
Cooperare, 166

Payoff
terminal/integral payoff
Coalition
effectivc (for an imputation) Commodily bundle Convex combination Composition of simple games Payoff configuration
coalitionally rațional individually rațional
Countcr-objection
Cooperation

Descompunere a unui joc, 37
Discriminare (a unui jucător), 190
Dominare
— Intre liniile sau coloanele unei matrice, 55
— între imputații, 184, 219, 225
Duel, 111

Decomposition of a game
Discrimination
Dominalion

Due
-

*> Pentru fiecare noțiune precizăm doar pagina unde aceasta este definită. (.V. *T.)*

4. MASCIILER, M. *The Inequalities that Determine the Bargaining Set* Research
Program in Game Theory and Mathematical Economics, Research Memorandum 17, Hebrew University of Jerusalem, January 1966.
5. MASCHLER, M. PELEG, B. *A Characterization, Existence Proof, and Dimension Bounds*
for the Kernel of a Game. în: Pacific J. Math. 18 (1966), p. 289 — 328.
6. MILNOR, J. *Bcasonable Outcomes for n-Person Games,* RM —916, RÂND Corporation,
1952.
7. PELEG, B. *On the Bargaining Set of m-Quota Games.* în : Annals 52.
8. PELEG, B. *Existence Theorem for the Bargaining Set* în ; Bull. Am. Math.
Soc. 69 (1963), p. 109-110.
9. SHAPLEY, L.S. *A Value for n-Person Games.* în : Annals 28.

Capitolul 10

1. AUMANN, R.J. *Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games.* în : Annals
40.
2. AUMANN, R.J. *Markels with a Continuum of Traders.* în : Econometrica 32 (1964),
p. 443-476.
3. DAVIS, M. *Symmetric Solutions to Symmelric Games ivitli a Continuum of Players.*
în : *Becent Advances in Game Theory.* Proceedings of Confcrence at Princcton University, 1961.
4. HARSANYI, J.C. *A Bargaining Model for the Cooperative n-Person Game.* în :
Annals 40.
5. HARSANYI, J. C. *A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Games.* în : International Economic Review 4 (May 1963).
6. ISBELL, J. *Absolute Games.* în : Annals 40.
7. KANNAI, Y. *Values of Games ivith a Continuum of Players.* Research Program in
Game Theory and Mathematical Economics, Research Memorandum 11, Hebrew University of Jerusalem, August 1961.
8. LUCAS, W. F. *Solutions for Four-Person Games in Parlilion Function Form.* în :

J. SIAM 13 (1965), p. 118-128.
9. MILNOR, J. și SHAPLEY, L. S. *Values of I.arge Games* II : *Oceanic Games.* RM —2699,
RÂND Corporation, February 1961.
10. MIYASAWA, K. *The n-Person Bargaining Game.* în : Annals 52.
11. NERING, E. D. *Coalition Bargaining in n-Person Games.* în : Annals 52.
12. SELTEN, R. Valuation of n-Person Games. în : Annals 52.
13. SHAPLEY, L. S. *A Value for n-Person Games Wilhout Side Pagments.* Proceedings
of a conference at Princenton University, April 1965.
14. STEARNS, R. E. *Three-Person Cooperative Games Wilhout Side Pagments.* în : Annals 52.
15. STEARNS, R. E. *On the Axioms for a Cooperative Game Whithout Side Payments.* Re
port 62 —RL —3130 E, General Electric Laboratories, Schenectady, N. Y., septembrie 1962.

Anexa

1. BONNESEN, T. și FENCIIEL, W. *Theorie der konvexen Korper.* în : Ergebnissc der Mathe,
matik und ihrer Grcnzgebiete, Voi. 3, No. 1, Berlin, Springer, 1934 și Ncw York- Chelsea, 1948.
2. GALE, D. *Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities.* în : Activity Analysis
of Production and Allocation, editată de Koopmans, T. C., New York, John Wiley and Sons, Inc., 1951.
3. KAKUTANI, S. *A Generalization of -Broutver's Fixed Point Theorem.* în : Duke
J. Math., Voi. 8 (1941), p. 457-459.
4. WEYL, A. *The Elementary Theory of Convex Polyhedra.* în : Annals 24.
3. HAUSNER, M. *Mulli-Dimensional Utililies.* în : *Decision Processes,* editată de Thrall,
Coombs și Davis, Ncw York, John tVilcy and Sons, Inc. 1954.
4. HERNSTEIN, J. N. și MILNOR J. *An Axicmatic Approach to Measurable Ulilily.* în :
Econometrica 21 (1953), p. 291—297.
5. ISBELL, J. *Absolute Games.* în : Annals 40.
6. LUCE, R. D. *A Probabilistic Theory of Ulilily.* Teclinical Report 11, Behavioral
Models Project, Columbia University, 1956.
7. SUPPES, P. și WINET M. Azi *Axiomatizalion of Ulilily Bascd on the*

Nolion of
Ulilily Differences. în : Man. Sci. 1 (1955), p. 259 — 270.

Capitolul 7

1. BRAITHWAITE, R. B. *Theory of Games as a Tool for the Moral Philosopher*. Cambridge, Cambridge University Prcss, 1955.
2. HARSANYI, J.C. *Approaches to the Bargaining Problem before and afler the Theory of Games : a Criticai Discussion of Zeullien's, Hick's and Xash's Theories.* în; Econometrica 24 (1956), p. 144 — 157.
3. HARSANYI, J. C. *A Solution for Non-Cooperative Games.* în : Annals 52.
4. LEMKE, C. E. *Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming.* în : Man. Sci. 11 (May 1965).
5. NAȘII, J. *Equilibrium Points in n-Person Games.* în : Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), p. 48-49.
6. NASH, J. *The Bargaining Problem.* în : Econometrica 18 (1950), pp. 155 — 162.
7. NASH, J. *Non-Cooperative Games.* în : Annals of Mathematics 54 (1951), p. 286 — 295.
8. RAIFFA, H. *Arbitralion Schemes for Generalized Ttvo-Person Games.* în : Annals 28.
9. SHAPLEY, L. S. *Some Topics in Tivo-Person Games.* în : Annals 52.
10. ZEUTHEN, F. *Problems of Monopoly and Economic Warfare.* I.ondon, G. Ronlledge and Sons, 1930.

Capitolul 8

1. BOTT, R. *Symmetric Solutions to Majority Games.* în : Annals 28.
2. GII.LIF.S, D. B. *Solutions to General Non-Zero-Sum Games.* în : Annals 40.
3. GURK, H. și ISBELL, J. *Simple Solutions.* în ; Annals 40.
4. KALIȘCH, G.K. și NERING, E. 1). *Countably Infinitely Many Persan Games.* în : Annals 40.
5. MCKINSEY, J. C. C. *Isomorphism of Games Stralegic Equivalence.* în : Annals 21.
6. OWEN, G. *Tensor Composition of .\on-Xegatine Games.* în : Annals 52.
7. OWEN, G. *Discriminatory Solutions of n-Person Games.* în: Proc. Am. Malh. Soc.

17 (1966), p. 653-657.
8. SHAPLEY, L.S. *Quota Solutions of n-Person Games.* în : Annals 28.
9. SHAPLEY, L.S. A *Solution Containing an Arbitrarii Closed Component.* In : Annals
40.
10. SHAPLEY, L. S. *Solutions of Compound Simple Games.* în : Annals 52.
11. SHUBIK, M. *Edgeuiorth Market Games.* în : Annals 40.

Capitolul 9

1. AUMANN, R.J. și MASCIILER, M. *The Bairgaining Set for Cooperative Games.* în : An;
nals 52.
2. LUCE, R.D. *'t'-Stability : a Xeiv Equilibrium Concept for n-Person Game Theory.*
în : *Mathematical Models of Human Behavior*. Proceedings of a symposium, Stamford, Conn., Dunlap and Associates, 1955, p. 32 — 44.
3. LUCE, R.D. *k-Stability of Symmetric ard Quota Games.* în : Annals of Mathematics
62 (1955), p. 517-527.

6. GROSS, O. *A Rațional Game on the Square.* în : Annals 39.
7. KARLIN, S. *Operator Treatment of the Minmax Principie.* în : Annals 24
8. KARLIN, S. *On a Class of Games.* în : Annals 28.
9. KARLIN, S. *Reduclion of Certain Classes of Games io Integral Equations.* în : Annals 28.
10. RESTREPO, R. *Tactical Problems Involving Secerai Actions.* în : Annals 39.
11. SHIFFMAN, M. *Games of Timing.* în : Annals 28.
12. SION, M., și AA'OLFE, P. *On a Game Without a Value.* în : Annals 39.
13*. GLICKSBERG, I. L. A *further generalization of the Kakutani fixed point theorem with applications to Nash equilibrium theoiem.* în : Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), no. 1.
14*. GOLSTF.IN, E. G. *Iionvexe Optimierung. Elemente der Theorie.* (Traducere din limba rusă.) Akademie-Verlag, Berlin, 1973.
15*. FAN, K. *Minimax theorems.* în: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38 (1952) 121 — 126. 16*. FENSTAD, J. E. *Good stratcgics in general games.* în : Math. Zeit. 101 (1967), no. 3. 17*. KAKUTANI, S. *A generalization of Brower's fixed point theorem.* în : Duke Math.
J. 8 (1941), 457-459.
18* K.NESSEn, H. *Sur un theorcme fondamental de la theorie desjeux.* în

: C.R. Acad. Sci. (Paris) 231 (1952), Nr. 25.
19*. SION, M. *On general minimax iheorems.* în: Pacific J. Malh. 8 (1958), 171 — 176. 20*. STEFĂNESCU, A. *Puncte de echilibru in extensiile aleatoare ale unui joc.* în : St. Cerc. ' Mat.
21*. ȘTEFĂNESCU, A. *Strategii e-optimale in jocurile necooperaliste.* în : St. Cerc. Mat. 22*. STOER, J. *Duality in nonlincar progranuning and the minimax theorem.* în : Num. Alalli. 5 (1963), 371-379.

Capitolul 5

1. BEIIKOVITZ, L. D. și FLEMING AV. FI. *On Differenlial Games with Integral Payoff.*
în : Annals 39.
2. BEIIKOVITZ, L. D. *A Variational Approach to Differenlial Games.* în : Annals 52.
3. BERKOVITZ, L. D. *A Differenlial Game without Pure Strategy Solutions on an Open*
Set. în : Annals 52.
4. BLACKWELL, D. *Mulli-Component Attrition Games.* în : Naval Research Logistics
Quarlerly 1 (1954), p. 327-332.
5. DUBINS, L. E. *A Discrete Evasion Game.* în : Annals 39.
6. EVERETT, H. *Recursive Games,* în : Annals 39.
7. FLEMING, AV. H. *The Convergence Problem for Differential Games.* în : Annals 52.
8. ISAACS, R. *Differential Games,* New York, John AA'iley & Sons, Inc, 1965.
9. ISBELL, J. *Finiiary Games.* în : Annals 39.
10. MILNOR, J. și SHAPLEY, L. S. *On Games of Survival.* în : Annals 39.
11. MYCIELSKI, J. *Conlinuous Games of Perfect Infoimation.* în : Annals 52.
12. RYLL-NAnDZEWSKi, C. *A Theory of Pursuit and Evasion.* în : Annals 52.
13. SCĂRI-, II. E. *On DifferentialGames with Survival Payoff.* în : Annals 39.
14. SHAPLEY, L. S. *Slochastic Games.* în : Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953),
p. 327-332.

Capitolul 6

1. ARHOW, K. J. *Social Choice and Individual Valucs.* Cowlen

Connnission Monograph
12, New York, John AA'iley and Sons, Inc. 1951.
2. DAVIDSON, D., SIEGEL, S. și SVPPES, P. *Srme Experimer.ls and Related Theory on the Measurement of Ulilily and Subjeclive Probability.* Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Tcchnical Report 1, Stanford Universily, 1955.
14*. ONICESCU, O. *Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară.* București, Editura Academiei R.S.R., 1961, 1971.
15*. VOROBIEV, N. N. *Predmel i soderjanie teorii igr.* în : G. Owcn. *Teoria igr.* Nauka, Moskva, 1970.

Capitolul 1

1. BERGE, C. *Topological Games ivith Perfect Information.* în Annals 39.
2. GALE, D. și STEWART, F. M. *Infinite Games ivith Perfect Information.* în : Annals 28.
3. KUHN, H. W. *A Simplified Turo-Person Poker.* în : Annals 24.
4. KUHN, H. W. *Extensive Games and the Problem of Information.* în : Annals 28.
5. NASH, J. și SHAPLEY, L. S. *A Simple Three-Person Poker Game.* în : Annals 24.

Capitolul 2

1. BROWN, G. W. și VON NEUMANN, J. *Solutions of Games by Differer.tial Equations.* în : Annals 24.
2. DRESHER, M. și KARLIN S. *Solutions of Convex Games as Fixed Points.* în : Annals 28.
3. FAHKAS, J. *Theorie der Einfachen Vrgleichungen.* în : J. Reine Angew. Math. 124 (1902), p. 1-27.
4. GALE, D., KUHN, H. W. și TUCKER, A. W. *On Symmetric Games.* în : Annals 24.
5. MOTZKIN, T. S., RAIFFA H., THOMPSON G. L. și THRALL, R. M. *The Double Description Method.* în : Annals 28.
6. ROBINSON, J. *An Iterative Method of Solving a Game.* în : Annals of Mathematics 54 (1951), p. 296-301.
7. SHAPLEY, L. S. și SNOW, R. N. *Basic Solutions of Discrete Games.* în :

Annals 24.
8. VVEYL, H. *Elementary Proof of a Minimax Theorem due io von Neumann.* în : Annals 24.

Capitolul 3

1. DANTZIG, G., FORD L. R. și FULKERSON, D. R. *A Primal-Dual Algorithm for Linear*
Programs. în : Annals 38.
2. DANTZIG, G. și FULKERSON, D. R. *On the Max-Flcu> Min-Cut Theorem of Networks.*
în : Annals 38.
3. GASS S. I. *Linear Programming .* New York, McGraw-Hill Book Co., 1958.
4. GOLDMAN, A. și TUCKER, A. W. *Theory of Linear Programming* în : Annals 38.
5. TUCKER, A. W. *Dual Syslems of Ilomogeneous Linear Belations.* în : Annals 38.
6. VAJDA, S. *The Theory of Games and Linear Programming.* London, Methuen *& Co.*
Ltd., și New York, John Wiley and Sons, Inc. 1956.
7. WOLFE, P. *Delenninaleness of Polyhedral Games.* în : Annals 38.
8*. DRAGOMIRESCU, M., MALIȚA, M. *Programarea pătratică.* București, Editura științifică, 1968.

Capitolul 4

1. BOHNENBLUST, H. F., KARLIN S. și SHAPLEY, L. S. *Games U'ith Conlinuous Convex*
Payoff. în : Annals 24.
2. BOHNENBLUST, H. F., KARLIN S. și SHAPLEY, L. S. *Solutions of Discrete TUTO- Person*
Games. în : Annals 24.
3. BOREL, E. *Sur Ies jeux ou inlerviennent le hasard et l'habilele des joueurs.* în : *Ele-*
ments de la Thiorie des Probabililes 3®"» edition, Paris, Librairie Scientifique, 1924.
4. DRESHER, M., KARLIN S. și SHAPLEY, L. S. *Polynominal Games.* în : Annals 24.
5. DUFFIN, R. J. *Infinite Programs.* în : Annals 38.

BIBLIOGRAFIE

BIBLIOGRAFIE GENERALĂ

Următoarele cărți conțin material de interes general*). Cărțile și articolele legate de tematica unui anumit capitol al prezentei cărți sint date separat, in bibliografia capitolului respectiv. Referințele [1, 2, 4, 5, 7] constau fiecare din mai multe articole separate și vor fi referite in bibliografiile capitolelor prin Annals 24, Annals 28 etc.

1. DRESHER, M., SHAPLEY, L. S. și TUCKER, A. W. (Editori). *Adoances in Game Theory.*
în : Annals of Mathemalics Studies No. 52, Princeton, Princeton University Press, 1964.
2. DRASHER, M., TUCKER, A. W. și WOLFE, P. (Editori). *Contributions io the Theory of*
Games, III. în : Annals of Mathemalics Studies No. 39, Princeton, Princeton University Press, 1957.
3. KARLIN, S. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics.*
Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. Inc. 1959.
4. KUHN, H. W. și TUCKER, A. W. (Editori). *Contributions tothe Theory of Games, I—II.*
în : Annals of Mathematics Studies No. 24, 28, Princeton, Princeton University Press, 1950, 1953.
5. KUHN, H. W. și TUCKER, A. W. (Editori). *Linear Inequalities and Related Systems.*
în : Annals of Mathematics Studies No. 38, Princeton, Princeton University Press, 1956.
6. LUCE, R. D. și RAIFFA, H. *Games and Decisions.* New York, John Wiley and Sons,
Inc., 1957.
7. TUCKER, A. W. și LUCE, R. D. (Editori). *Contributions to the Theory of Games, IV.* în :
Annals of Mathematics Studies No. 40, Princeton, Princeton University Press, 1959.
8. VON NEUMANN, J. și Morgenstern. O. *Theory of Games and Economic Behavior.* Prin
ceton, Princeton University Press, 1944, 1947.
9*. Ciucu G., IOSIFESCU M. s. a. *Teoria jocurilor.* București, Editura

* Lucrările marcate cu asterisc sini adăugate de traducător, pentru a facilita accesul cititorului la literatura de specialitate in limba română. *(N. T.)*

tehnică, 1965. 10*. DAVIS, M. D. *Game theory.* .4 *nontechnical introduction.* Basic Books Inc. Publishers, New York — London, 1970.
11*. GHEHMEIER, I. B. *Introducere in teroria cercetării operaționale.* (Trad. din 1. rusă) București, Editura tehnică, 1973.
12*. GUIAȘU, S., MALIȚA M. *Triade.* București, Editura științifică, 1973.
13*. MCKINSEY, J. C. C. *Introduction to the theory of games.* McGraw Hill Book Co. Inc., New York — Toronto — London, 1952.

Probleme din capitolul 7

1. Vezi articolul [7.5].
2. Vezi articolul [7.6].
3. a) Pe scurt, se vede că nu se poate cișliga nimic prin cooperare In a 100-a partidă. Deci, in a 100-a partidă fiecare jucător va folosi a doua strategie. Atunci, In a 99-a partidă nu se poate clștiga nimic prin cooperare etc.
b), c) Demonstrațiile slnt extrem de simple.
4. Vezi articolul [7.9].

Probleme din capitolul 8

1. a) Dacă mulțimea *V* este stabilă și rj V, atunci există *y* £ V care domină pe *x.* Aceasta este insă imposibil, dacă *x* aparține nucleului.
b), c). Vezi articolul [8.2].
2. Găsiți un z astfel ca z>x și Ez< = v(.V). Atunci, fie z £ V și z domină pe *x* (prin N), fie z{ *V* și deci există {/£ V astfel ca *y* > Atunci *y y-s*[1]-
3. Vezi articolul [9.6].
4. Vezi articolul [8.3].
5. Vezi articolul [8.7].
6. Vezi articolele [8.6] și [8.10].
7. Aceasta este o consecință directă a problemei 8.3. Observați că = 0 pentru toți f.
8. Vezi articolul [8.9],
9. Vezi articolul [8.11].

Probleme din capitolul 9

1. Vezi articolul [9.9].
2. Vezi articolul [9.8].
3. Vezi articolul [9.5].
4. **5.** Vezi articolul [9.3],
6. Jocul este 2-și 3-instabil. Singura pereche l-stabilă este {o; {1}, {2}, {3}, {4}}.

Probleme din capitolul 10

1. Totul se reduce la a demonstra că un monom de gradul *m* In se poate exprima ca o sumă și diferență a puterilor *m* a măsurilor *Vj,* unde fiecare vy este o combinație liniară de [ij. Această proprietate se demonstrează prin inducție dublă, după gradul monomului fi numărul măsurilor.
2. <p = 3/8X + 1/4 *y.*
3. Vezi articolul [10.8],
4. Vezi articolul [10.15].

2. Vezi articolul [2.7],
3, 4. Ambele demonstrații slnt extrem de simple.

V [4], pp. 51 — 73 in
V articol [2.7].
V articol [2.1].
V articol [2.6],

Probleme din capitolul 3

2. Acest program coincide cu dualul său, adică dualul său constă din maximizarea funcției obiectiv a programului dat, luată cu semn schimbat. Rezultă că, dacă programul este consistent, valoarea programului trebuie să fie 0, exact ca In cazul jocurilor simetrice.
3. Aceasta este o variantă a teoremei 3.2.1, cu integrale in loc de sume.
4. Vezi articolul [3.7],
5. Vezi de exemplu cartea lui G. Owen, *Finite Mathematics,* pp. 374 — 381.
6. x = (11/5, 8/5), D = 62/5.
7. x = (13/3, 0, 5), v = 8.

8. x = (2/7, 29/14, 0), $v = 60/7$.
9. x = (0, 0, 20/3, 2/3), $v = 22/3$.
10. x = (4/7, 3/7, 0), y = (5/7, 0, 2/7, 0), v = 22/7.
11. x = (52a, 50a, 41a), y = (44a, 42a, 57a), v= 96a, unde a = 1/143.
12. x = (6a, 20a, 0, 11a), y = (14a, 4a, 0, 19a,0), D = 121a, unde a = 1/37.

Probleme din capitolul 4

1, 2. Vezi articolul [4.8].
3. Vezi articolul [4.4].
4. Vezi [4], pp. 173-182 In *Annals 28.*
5. Vezi articolul [4.12].
6. $v = 0$, $F(x) = 2{,}121\ (x^2 + x)^{-3/2}$ pentru $1/7 < x < 1$.
7. Vezi articolul [4.10].
8. Problema este o generalizare directă a exemplului 4.6.3.
9. Vezi articolul [4.6].

Probleme din capitolul 5

1, 2. Vezi articolul [5.6].
3. Vezi articolul [7.9],
4. Vezi pp. 132 — 156 In cartea [5.8],
5. Vezi articolul [5.3],
6. Vezi pp. 200 — 230 în cartea [5.8],

Probleme din capitolul 6

1. Demonstrația este simplă.
2. Vezi lucrarea [6.1].

INDICAȚII PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR PROPUSE

Notă. Multe dintre problemele propuse spre rezolvare cititorului au demonstrații foarte lungi. în astfel de cazuri am indicat lucrarea In care se găsește tratarea problemei respective.

Probleme din capitolul 1

1. Vezi articolul [1.2],

I	II	III		Cișt	iguri	
a	*c*	*e*	(	0	0	0 `
a	*c*	*f*	(	3	-1,	1 `
a	*d*	*e*	(	- 1	1	3 `
a	*d*	*f*	(	3	2	1 `
b	*c*	*e*	(	1	3	1 `
b	*c*	*f*	(	- 1	3	2 `
b	*d*	*e*	(	2	-1,	3 `
b	*d*	*f*	(	1	1	1 `

Probleme din capitolul *2*

1. Se consideră un șir de puncte z^4, aparținlnd exteriorului mulțimii C și astfel ca *x*—tx,* și hiperplanele care separă fiecare din aceste puncte de Închiderea mulțimii C (conform lemei 2.4.2). Fie p^k = (pj, ..., p*) vectorii de direcție ai acestor hiper- plane. Presupunlnd că toți vectorii p^4 au norma egală cu unu, șirul *p** are un punct limită p. Hipcrplanul de direcție p prin *x* are proprietatea dorită. Vezi și articolul [2.3]. extrem al lui *8* Q *P* și *x', x" eS (] P* rezultă *x' = x"*. Deci *x* este punct extrem al lui 6'.

Am arătat astfel că *y* este o combinație liniară convexă de *y"* și cel mult *n* puncte extreme ale lui &. Dar *y"* a fost definit de o dreaptă arbitrară trecînd prin *y,* deci el este un

punct arbitrar al frontierei lui 6'. Dacă luăm drept *y″* un punct extrem al lui <8, atunci *y* este combinație liniară convexă de cel mult *n* + 1 puncte extreme ale lui $.

A.2. TEOREME DE PUNCT FIX

Dăm fără demonstrație două teoreme care au fost folosite în text. Demonstrațiile acestora sînt lungi și pot fi găsite în lucrările citate în bibliografie.

A.2.1. TEOREMĂ. *(Teorema de punct fix a lui Brouwer). Fie S o mulțime convexă compactă a unui spațiu euclidian n-dimensional și fie J o aplicație continuă a lui S în 8. Atunci există cel puțin un (punct fix) x* e *8 astfel ca f (x) = x.*

Această teoremă exprimă o proprietate topologică și se aplică deci oricărei mulțimi topologic echivalente cu o astfel de mulțime S (uneori teorema se formulează în ipoteza că £ este un n-simplex), în cazul general demonstrația este complicată și necesită cunoștințe ample de topologie, dar pentru *n* = 1 ea este o consecință imediată a faptului că o funcție continuă ia orice valoare situată între două valori ale sale. (Demonstrația se reduce la a arăta că ecuația *f(x)* — *x* = 0 are o rădăcină în intervalul dat). O generalizare foarte utilă pentru teoria jocurilor este următoarea teoremă de punct fix a lui Kakutani.

A.2.2. DEFINIȚIE. Fie *f* o aplicație a unui spațiu topologic A în mulțimea părților unui spațiu topologic *Y* (pentru orice *xeX,f(x)* este o submulțime a lui Y). Aplicația *f* se numește *superior semicon- tinuă* (s.s.c.) *în punctul* x_0, dacă pentru orice șir x_{lt} x_2, ... care converge către x_0 și orice șir y_{lf} y_2, ... cu /(#<), limita șirului $\{y_n\}$ (dacă acesta converge), aparține mulțimii *f* (x_0). Aplicația *f* se numește *superior*

semicontinuă, dacă este s.s.c. în fiecare punct al lui *X.*

A.2.3. TEOREMĂ. *(Kakutani). Fie 8 o mulțime convexă compactă a spațiului euclidian n-dimensional și f o aplicație superior semicontinuă care asociază fiecărui x e 8 o submulțime convexă închisă a lui 8. Atunci există x e S astfel ca x ef(x).*

A.1.9. DEFINIȚIE. Fie 8 o mulțime convexă și *x* e <8. Spunem că *x* e8te un *punct extrem* al mulțimii *S,* dacă nu există două puncte diferite *x'* și *x"* în 8 astfel ca

$$x = \text{--}\blacksquare\ (x' \text{-}ț\text{-}\ x").$$

Următoarea teoremă importantă a fost folosită în textul cărții.

A.1.10. TEOREMĂ. *0 mulțime convexă compactă S a spațiului euclidian n-dimensional este acoperirea convexă a punctelor sale extreme. Mai mult, orice y* e 8 *se poate exprima ca combinație liniară convexă de cel mult n* + 1 *puncte extreme ale lui* 8.

Demonstrație. Este evident că a doua afirmație a teoremei o implică pe prima. Vom demonstra deci numai afirmația a doua, anume prin inducție după *n.* Pentru *n = 1* singurele mulțimi convexe compacte sînt mulțimea vidă 0, mulțimile formate dintr-un singur punct și intervalele [a, &]. Pentru 0 și mulțimile formate dintr-un punct teorema este trivială; pentru un interval *[a,* i] este evident că *a* și *b* sînt puncte extreme, și că orice *y* e *[a,* 6] este o combinație liniară convexă a lui *a* și *b.*

Să presupunem acum teorema adevărată pentru *n — 1.* Atunci ea este evident adevărată pentru orice mulțime *(n —*

l)-dimensională, chiar dacă aceasta este submulțime a unui spațiu de dimensiune mai mare. Fie 8 ca în ipoteză și fie *y* e 8. Considerăm o dreaptă arbitrară care trece prin *y.* Deoarece 8 este convexă și compactă, intersecția sa cu această dreaptă este un segment închis, să zicem cu capetele *y'* și *y".*

Punctul *y'* aparține frontierei mulțimii 8 și deci (conform problem ei 2.1) există un hiperplan *P* care trece prin *y'* și astfel ca mulțimea *8* să fie inclusă în unul din cele două semispații închise determinate de *P* (de o parte a lui *P). P* este evident o mulțime convexă închisă, deci 8 fi *P* este o mulțime convexă compactă de dimensiune cel mult *n* — 1; în baza ipotezei inducției punctul *y'* e 8 ("| P se poate exprima ca o combinație liniară de cel mult *n* puncte extreme ale lui 8 f| P. Vom arăta acum că acestea sînt puncte extreme ale lui 8.

Fie *x* un punct extrem al lui 8 Q *P* și să presupunem că *x* =

= — *{x'* + *x"),* unde *x', x"* e 8. *P* este mulțimea punctelor care 2
satisfac o ecuație de formă *L (x)* = a, unde *L* este o funcție liniară. Știm că *L (x)>* a pentru orice *x* e 8. Datorită liniarității lui *L* trebuie să avem *L ţx')* = *L(x")* = și deci *x', x"* e *P.* Întrucît *x* este punct

Demonstrație. Se vede imediat că avem *K G.S,* în plus 8 este convexă, deoarece dacă *y,y'* e *8,* adică

$$y = \sum_{J-l}^{p} c_{,}.\ ar^{*},\ x^{1}, \ldots, x^{p}\ e\ K,$$

$$y' = \sum_{i\hat{}p+1}^{1>+tf} C_j X^{1},\qquad x^{v+1},\ldots\quad x^{1>+11}\ e\ K,$$

unde $(c_n \ldots, c_p)$ și $(c_{p+1}, \ldots, c_{p+q})$ satisfac condițiile 1) și 2) din A.1.7, iar $0 < r < 1$, atunci putem scrie

$$y'' = ry + (1 - r)y' = \sum_{3=1}^{p} (rc_j)x^{i} + \sum_{3=P+1}^{p+g} (1 - '')$$

și numerele $(rq,\ldots, rc_P, (1-r)\ c_{p+1},\ldots, (1-r)\ c_{p+q})$ satisfac condițiile 1) și 2) din A.1.7, adică *y" e S;* prin urmare, 8 este convexă. Rezultă că *H (K)* Q 8.

Pentru a demonstra incluziunea inversă fie $y = \sum_{i=1}^{p} C_j X?,$ unde $x?eK$ și c, satisfac 1)—2). Arătăm prin inducție după *p* că *y* e *H (K).* Pentru $p = 1$ avem $y = x^{1}$ și deci *y e K* c *H (K).* Să presupunem proprietatea adevărată pentru $p - 1$. Fără a restrînge generalitatea putem 3>-l
presupune că c, > 0 ; notînd $r = \sum_{i=i} c, > 0$, avem

$$y = ry' + (1 - r)\, x^{v},$$

und

$$y' \text{---} = \text{L}$$
J-1

Evident *y'* e 8 și deci prin ipoteza inducției *y'e H (K).* Totodată *x*^{p}*eH(K)și,* deoarece această mulțime este convexă, rezultă *y e H (K).* Deci 8 C *H (K),* ceea ce încheie demonstrația.

Prin acoperire convexă se asociază unei mulțimi arbitrare cea mai mică mulțime convexă care o include. în alte cazuri este interesant să se determine o submulțime a unei mulțimi convexe date, a cărei acoperire convexă să fie mulțimea dată.

O mulțime 8 este deci convexă dacă și numai dacă segmentul care unește două puncte arbitrare din & este conținut în <8. Pentru comparație amintim că o funcție este convexă, dacă și numai dacă coarda care unește două puncte arbitrare ale graficului funcției este situată deasupra porțiunii corespunzătoare a graficului. Mulțimea punctelor situate deasupra graficului unei funcții convexe este deci convexă (această proprietate este uneori dată ca definiție a funcției convexe).

A.1.5. TEOREMĂ. *Fie* {8$_{o}$}$_{oG}$^ *o familie de mulțimi convexe {unde A este o mulțime de indici arbitrară). Atunci* Q *8$_{a}$ este de asemenea ae A convexă.*

Adeseori avem dată o mulțime *K* neconvexă și dorim să aplicăm o teoremă care este valabilă numai pentru mulțimi convexe. Pentru aceasta este necesar să asociem mulțimii *K* o mulțime convexă *H{K).*

A. 1.6. DEFINIȚIE. Numim *acoperire convexă* a unei mulțimi *K,* notată *H (K),* interesecția tuturor mulțimilor convexe care includ pe *K.*

Prin teorema A.1.5 acoperirea convexă a oricărei mulțimi este convexă; acoperirea convexă a unei mulțimi convexe coincide desigur cu mulțimea însăși. Există încă un mod de a defini acoperirea convexă, anume prin combinații

liniare convexe.

A.1.7. DEFINIȚIE. Fie $x^1, x^2, ..., x^p$ puncte ale unui spațiu liniar real. Punctul y se numește *combinație {liniară) convexă* a punctelor a?[1], a?[2], ..., x^p dacă

$$y = \mathbf{S}\ c_i$$

unde c_x, c_2, ..., c„ sînt numere reale cu proprietățile

1) $c_3 > 0$, $j = 1, ..., p$,

2) S c,- = 1.

Relația între combinațiile convexe și acoperirea convexă este arătată de teorema următoare.

A.1.8. TEOREMĂ. *Pentru orice mulțime K, acoperirea convexă H (K) este mulțimea S a tuturor combinațiilor liniare convexe de elemente din K.*

ANEXĂ

A.l. CONVEXITATE

în toată această carte folosim intensiv noțiunea de convexitate. Dăm mai jos cîteva proprietăți ale funcțiilor convexe; alte proprietăți au fost date în text, în special în capitolele 2 și *4.*

A.l.l. DEFINIȚIE. O funcție cu valori reale / *(x),* definită pe un spațiu liniar real, se numește *convexă,* dacă pentru orice valori *x, y* ale variabilei și orice număr *r* astfel ca 0<r<l este verificată inegalitatea

$$f(rx\,4\text{-}\,(1\,\text{-}\,r)y) < rf(x) + (1\,—\,r)\,f(y). \qquad (1.1)$$

Funcția *f* se numește *strict convexă,* dacă (1.1) este verificată ca inegalitate pentru orice *x y* și orice $0 < r < 1$.

A.l.2. DEFINIȚIE. Funcția *f* se numește *concavă (strict concavă)* dacă — *f* este convexă (strict convexă).

Teorema următoare dă proprietăți elementare ale funcțiilor convexe.

A.1.3. TEOREMĂ. *Dacă f și g sînt funcții convexe și* c>0, *atunci f g, cf și* max {/, *g} sînt funcții convexe.*

Analog, dacă /și *g* sînt funcții concave, atunci/ + *g, cf* și min {/, *g}* sînt funcții concave.

Se vede imediat că o funcție liniară este atît convexă, cît și concavă. Reciproc, o funcție atît convexă, cît și concavă

este liniară.

A.1.4. DEFINIȚIE. **O** submulțime <8 a unui spațiu liniar real *V* se numește *convexă,* dacă pentru orice *x, y e S* și orice *r* e [0, 1]
avem *rx* + (1 — *r) y* e (1-

{1, 2}. Toate celelalte elemente ale lui aparțin lui care este astfel reuniunea mulțimilor :

$$0 < x_2 < 1, \quad 1 < x_3 < 5, \tag{10.3.7}$$

1 x_2 5, 0 «^3 3 ț (10.3.8)

$$x_2 > 5, \quad \#3 \quad 3. \tag{10.3.9}$$

Condițiile (10.3.2)—(10.3.9) dau cele trei mulțimi K_{lf} K_2, K_a. Mulțimea R = (J K_2 |J K_a este unica mulțime stabilă a jocului considerat (fig. 10.1).

PROBLEME

1. Suma oricărui număr finit de măsuri este de asemenea o măsură. Arătați că
orice polinom P ([i,, ..., p.$_m$) In măsurile (ij se poate scrie in forma P = q "?+ +
+ • • • + <> *v'^k,* unde *Cj* sint constante, q- slnt măsuri și *nj* sînt numere Întregi pozitive.

2. Determinați valoarea Shapley <p [i>] a jocului *v,* definit prin *u (S)* = X^s (S)p.(S) pentru orice submulțime S a intervalului [0, 1] măsurabilă Lebesgue, unde X este măsura Lebesgue și [r(S) = **l** *x* dx.

3. Completați demonstrația teoremei 10.3.4 (adică arătați că mulțimea stabilă *R*
Js

construită in demonstrație este singura mulțime stabilă). Pentru aceasta arătați prin inducție că mulțimile K_m, K_{m_v} sînt submulțimi ale oricărei mulțimi stabile.

8. Un joc de n persoane fără plăți laterale poate să nu posede nici o mulțime stabilă. Considerați jocul simplu de șapte persoane *v,* in care *H* este acoperirea convexă a următoarelor cinci puncte :

$$c = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 1),\ \text{pj} = (1, 1, 2, 0, 0, 0, 0),$$

$$p_2 = (0, 0, 1, 1, 2, 0, 0),\ p_3 = (2, 0, 0, 0, 1, 1, 0),$$

$$0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

si coalițiile ciștigătoare minimale slnt (1, 3, 5), (1, 2, 7), (3, 1, 7), (5, 6, 7). Orice coaliție ciștigătoare poate impune orice imputație, iar celelalte coaliții slnt efective numai pentru iinputațiilc In care toți membrii lor primesc ciștigul 0. Jocul *v* nu are nici o mulțime stabilă.

a) Nucleul jocului *v* este (c).

b) Notind cu segmentul [p_i, c], multimea imputațiilor care nu slnt dominate de *c* este L_r U Ă® Ü L_3. Dacă *V* este stabilă, ea trebuie să conțină cel puțin clte un punct $q < c$ din fiecare

c) Punctele q_t satisfac $q? = q? <= q?$, deci V conține un singur punct diferit de *c* din fiecare $L<$. Deci V nu este stabilă. Astfel *v* nu are mulțimi stabile.

Considerăm acum mulțimea .Ej $C_o = E_v$ Aceasta constă din vectorii nenegativi pentru care suma componentelor este 10. Pentru a obține G_r trebuie să înlăturăm din E_t imputațiile dominate de elemente din $R_2 = K_2$ u K_3. Imputațiile dominate de K_3 sînt cele cu $\#_t<l$, $®_3<1$, iar cele dominate de K_3 sînt cele cu x_x + a?$_3$<5, a?$_3$<3. Deci (?! este mulțimea

$$> 1 \text{ sau } x_3 > 1,$$
$$x_2\ 3 \text{ sau } x_3\ 1.$$

Se vede că G_x conține toate imputațiile din *E* pentru care $x_3 = 5$. Prin urmare, dacă $y_3 < 5$, atunci *y va* fi dominat

de un x e G_v prin

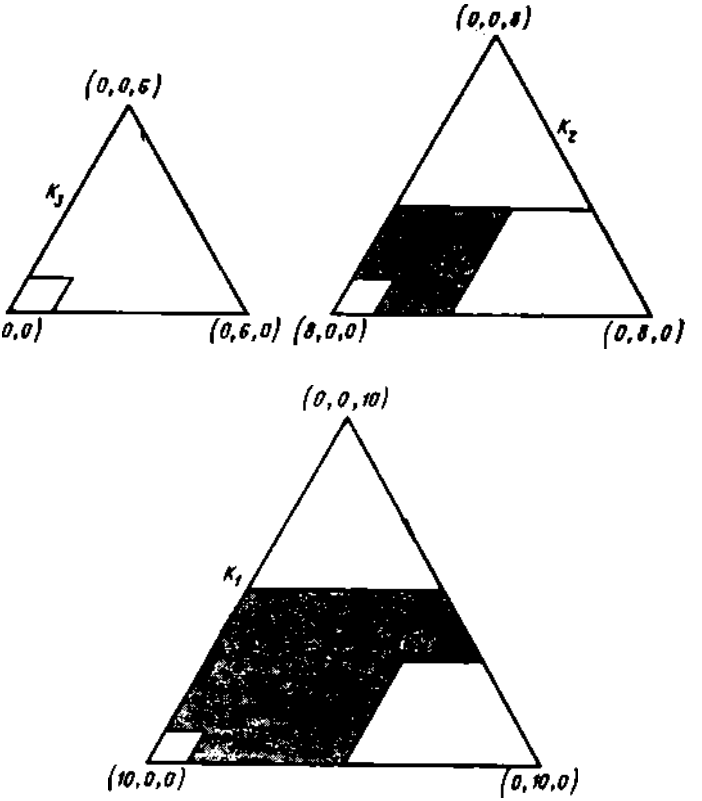


Fig. 8.10.

care verifică inegalitățile

$$+ a?_2 > 5, \#1 + \#_3 > 5,$$

sau echivalent

$$\#2 \hat{}1, \hat{}3 \quad 1^*$$

Dominarea în E_3 poate fi numai prin {2, 3}. Mulțimea K_3 constă deci din elementele lui E_3 f) C_2 maximale relativ la > prin *{2,* 3}.

Dacă $\#_2<1$ și $\#_3<1$, atunci $y > x$, unde $y = (4,1, \quad 1)$.

Dacă însă $\#_2 = 1$ sau $\#_3 = 1$, atunci # nu poate fi dominat în E_3 Q C_2. E_3 este deci reuniunea următoarelor două segmente :

$$\#_2 = 1, \ 0 < \#3 < 1, \qquad (10.3.2)$$

$$\#3 = 1, \quad 0 < \#2 < 1. \qquad (10.3.3)$$

Să considerăm acum mulțimea E_2 *(~)* $C_{\pm}$. Mulțimea E_2 constă din vectorii nenegativi cu suma componentelor 8; E_2 Q $C_{\pm}$ constă din elementele lui E_2 care satisfac inegalitatea $x_1 + \#_2>5$, sau echivalent $\#_3<3$. Pentru a obține G_2 trebuie să înlăturăm din E_2 Q acele elemente care sînt dominate de elemente din -K?$_3$. Singura coaliție care poate realiza imputații din K_3 este {2, 3}; din forma lui K_3 rezultă că trebuie să înlăturăm din E_2 Q elementele pentru care $\#_2<1$ și $\#_3<1$. Astfel G_2 este mulțimea dată prin

$$Xi + <x_2 + \#3 = 8,$$

$$\#3 \quad 3,$$

$$\#_2 > 1 \text{ sau } \#3 > 1.$$

K_2 este mulțimea elementelor lui G_2 maximale relativ la >. Deoarece coaliția realizatoare este {1, 3}, orice # pentru care $x_x + \#_3 < 5$ și $\#_3 < 3$ este dominat de un y e G_2. Se vede atunci că mulțimea K_2 constă din reuniunea următoarelor trei mulțimi:

$$0 < \#_2 < 1,\ 1 < \#_3 < 3, \tag{10.3.4}$$

$$1 < \#_2 < 3,\ 0 < \#3 < 3,\ \#_3 = 0. \tag{10.3.5}$$

în cazul 1) există conform ipotezei inducției y e A_{J+1} astfel ca $y >- x.$ în cazul 2) am văzut că există y e astfel ca $y > x.$ în ambele cazuri există deci y e R_{J} astfel ca $y > x.$

Procedînd în acest mod, ajungem la o mulțime $R = R_{I}$, care satisface ipotezele lemei 10.3.8 și este evident intern stabilă. Astfel, R este o mulțime stabilă.

Mai rămîne de arătat că R este unica mulțime stabilă. Demonstrația nu este dificilă și este lăsată cititorului (problema 10.3).

Demonstrația teoremei 10.3.4 folosește Ierna lui Zorn, dar într-un mod atît de nesemnificativ, încît poate fi considerată de fapt o demonstrație constructivă. Exemplul de mai jos ilustrează modul în care ea poate fi folosită pentru găsirea unei mulțimi stabile. Deoarece mulțimea imputațiilor este reuniunea unui număr mare de simplexuri, vom considera un joc de numai trei persoane. Acesta este mult mai simplu, avînd numai cinci partiții, față de cele 15 partiții ale unui joc de patru persoane. Se poate arăta că teorema 10.3.4 este adevărată și pentru jocuri de trei persoane.

10.3.11. Exemplu. Considerăm un joc de trei persoane cu

$$\mathscr{P}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \mathscr{P}_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \mathscr{P}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\},$$

Ș

$$(\{1, 2)\} = 5,$$
$$(\{1, 3\}) = \quad (\{2\}) =$$
$$\hat{}3\ (\{1\}) = 0,$$

$(\{£\}) = 0.$

$u(\{1, 2\}) = w(\{1, 3\}) = 5,\ u(\{2, 3\}) = 6,\ u(\{i\}) = 0.$

Este ușor de văzut că E_3 Q C_2 0, dar E_t (~| $C_3 = 0$, deci *m=3.* Să construim mulțimea *R.*

Mai întîi observăm că E_3 este simplexul vectorilor nenegativi cu suma componentelor 6; E_3 Q C_z constă din elementele lui E_3

Construim acum mulțimile K_{m_1}, K_{m_2},..., -fi^după cum urmează : presupunînd ca am construit deja K_m, K_{m_1},..., K_{j+1}, fie $R_{j+1} = m$ **= u** ^{K}**>** și fie *Gj* mulțimea tuturor imputațiilor din BjClCj-i care

$$1 = 3 + 1$$

nu sînt dominate de nici un element din R_{j+1}. Fie K_f submulțimea elementelor lui G, maximale (în G,) în raport cu relația >. Deoarece *Gj* este compactă, rezultă că orice re G G, — K_j este dominată de o imputație y G K_f și, prin urmare, orice x e E_t D — *Kj* este dominată de o imputație

$$= \bigvee^{m} jK_t.$$

Să presupunem acum (ca ipoteză a inducției) că nici un element din _R_{i+1} nu domină un alt element din R_{j+1} și că pentru orice

$$\text{®}^{e} \overset{m}{\underset{J+I}{\mathbf{u}}} \text{(-®in } G_{(_x)}) \; Rj\text{-}ti$$

există y *e* R_{j+1} astfel ca $y > x$. Să presupunem că x și y sînt ambele în *Rj.* $Rj — Rj_{+i}$ U Deoarece există următoarele patru posibi-
lități :

1) X G y^{e}

2) ®G y^*Kj*-,

3) *xeKj,* y^{6} *Rj+i»*

4) a? 6 3/GK,.

nu putem $x > y$ datorită ipotezei

în cazul 1), nu putem avea $x > y$ datorită ipotezei inducției, în cazul 2) nu putem avea $x > y$, deoarece y G G,- și x *e* R_{J+1}. în cazul 3) nu putem avea $x > y$, deoarece aceasta ar însemna că cel

puțin o mulțime M_G este strict efectivă pentru *y,* ceea ce contrazice faptul că *y* e C_3. în sfîrșit, în cazul 4) nu putem avea *x > y,* deoarece *x* și *y* sînt ambele maximale în *Gj* în raport cu relația Astfel, dacă *x* și *y* sînt ambele în *Rj,* nu putem avea *x > y.*

m

Să presupunem acum că *x* G ţj *(E_t* $C_{(_1)}$ — *Rj.* Atunci
există *1 = 3*
următoarele două posibilități mutual exclusive :

1) $^{x\,€}_{i\,+\,1}$ *(Ei* A C|-i) +

2) *X* G *Ej* n *Cj-j - Kj.*

10.3.8. LEMĂ. *Fie R o submulțime a lui Q astfel ca fiecare imputație x EQ—R să fie dominată de cel puțin o imputație y* e *R. Atunci orice x e E—R este dominată de cel puțin o imputație y* e *R.*

Demonstrație. Dacă *xEE—Q,* atunci există *t* astfel ca *xeE$_t$,* și există o coaliție *M* e^, cu j<min *(m,t—l),* care este strict efectivă pentru *x.* Alegem o astfel de coaliție Af_0 e astfel incit s să fie minimal, adică Jf_0 este strict efectivă pentru *x* dar orice *M E* cu j<s—1 nu este strict efectivă pentru *x.* Alegem *zEE$_S$* astfel ca M_o să fie efectivă pentru *z* șiz, *>x_f* pentru orice *ieN.* Atunci
Dacă *z E R,* atunci *z*^*-x* prin M_o, deci *z* este imputația *y* dorită. Dacă *zț R,* atunci există *y E R* care domină pe *z,* și conform lemei 10.3.6 avemy>a;. Deci în fiecare caz *x* este dominată de o imputație *y ER .*

10.3.9. LEMĂ . *Dacă R este o mulțime stabilă, atunci R* C *Q.*

Demonstrație. Fie *xEE — Q.* în demonstrația lemei

10.3.8 am văzut că există *ZE Q* astfel ca *z > x* și, dacă *y > z,* atunci *y > x.* Dacă *z E R,* nu putem avea deci *x E R.* Dacă *z ț R,* atunci există *y E R* astfel ca *y > z,* deci *y > x* și, prin urmare, *x ț R.* Astfel *x ț Q* implică *x i R.*

10.3.10. DEMONSTRAȚIA TEOREMEI 10.3.4. în baza lemelor precedente este suficient să arătăm că mulțimea *Q* conține o mulțime stabilă unică. Pentru aceasta construim anumite mulțimi *R, CE, C\Cj-i*

(j = 1,... ,m) și arătăm că mulțimea $R = \bigcup_{j=1}^{m} Rj$ este o mulțime stabilă

Fie K_m mulțimea tuturor elementelor din E_m Q maximale
în raport cu relația >. Deoarece este o relație de ordine parțială și E_m n este o mulțime compactă, pentru orice $x E E_m$ Q $C_{m_}$] care nu este maximal în raport cu >-$_M$, există conform lemei lui Zorn un element *y* maximal în raport cu această relație și astfel ca *y* >- $_M x$. Aceasta înseamnă că *M* este efectivă pentru *y* și strict efectivă pentru *x.* Deoarece *x E* rezultă *ME* ^$_M$ și deci *y* este realizabilă pentru *M.*

Mai departe, nu există nici un $z E E_m f\backslash C_{m_r}$ astfel ca *z>y.* într-adevăr, dacă presupunem că *z* >- *y* prin *S,* atunci $ este strict efectivă pentru *y,* și *z,* deci și *y,* sînt realizabile pentru $; dar *S =£ M* și, prin urmare, în baza lemei 10.3.7, Jf nu poate fi efectivă pentru *y.* Astfel *y* este maximal în E_m Q pentru relația >, deci $y E R_m = K_m$. Orice $x E E_m$ n C_{m_1} — R_m este dominat de cel puțin un $y E R_m$. în plus, datorită maximalității relativ la >, nici un element *x ER„* nu domină un alt element $y E R_m$.

Demonstrație. Deoarece numerele ||^|| sînt distincte, există o singură partiție care poate realiza *x.* Deci *x* este

realizabilă numai pentru coaliţiile acestei partiţii. Dar o coaliţie formată dintr-o singură persoană nu poate fi strict efectivă pentru o imputaţie, şi singurele partiţii, care conţin cel puţin două coaliţii formate din cel puţin două elemente, sînt cele de forma {{i,j}, {fc, *l}}* Să presupunem că & este de această formă şi că *{i,j}* este strict efectivă pentru *x.* Atunci avem

$$(\{b\ J\}) > u\ (\{«, J!)>\hat{}i +$$

Dar, deoarece *3?* realizează *x,* avem

$$+ r, + \quad + \hat{} = 11\hat{}11 = \hat{}\ (\{i, j\}) + \quad (\{fc, 1\})$$

şi deci

$$(\{\&, G) > {}^{u}\ (\{\&, *\}),$$

adică *{k,* 1} nu este efectivă pentru *x,* ceea ce încheie demonstraţia lemei.

Pentru demonstraţia teoremei 10.3.4 mai avem nevoie de cîteva notaţii. Un joc de patru persoane are 15 partiţii, pe care le numerotăm ^1, ^2; • • •, ^15 în ordinea descrescătoare a normei:

$$ll\hat{}\text{-}ll > ll\hat{}_{+}ili\ (j = l,...,14).$$

Fie *Ej* mulţimea tuturor imputaţiilor *x* astfel ca £ x_t = ll^i

ţimea tuturor imputaţiilor este deci $E=(_jE_j$. Introducem nucleele restrînse

$$= \quad Xi> u\ (M) \text{ pentru orice } JH \text{ e ţ_J l}$$

1 16 Al fc=l J

pentru j=l,... ,15, și mulțimea $C_0=E$. Este ușor de văzut că O, GCJ-J. Fie *m* cel mai mic întreg *j* astfel că $C_jQE_{/+1}=0$. Dacă pentru j=l,.. .,14, atunci punem wi=15. Se observă că m>0, deoarece $C_o['\backslash E_1?=E_1=£0.$ în efîrșit, definim

Primele două condiții sînt aceleași ca înainte; a treia condiție, numită *realizabilitate,* este nouă.

Să observăm că pentru fiecare partiție & suma

S = II^H

are în general o valoare diferită. Modelul jocurilor lui von Neumann și Morgenstern poate fi considerat ca un caz particular degenerat al acestuia, în care, indiferent de structura coalițiilor formate, suma utilităților primite de jucători este mereu aceeași. Am văzut că aceste jocuri au, în multe cazuri, un număr foarte mare de mulțimi stabile. Această multiplicitate a mulțimilor stabile provine tocmai din degenerarea funcției caracteristice. într-adevăr, avem următoarea teoremă.

10.3.4. TEOREMĂ. *Un joc v de patru persoane, în care numerele* **H^H** *sînt diferite pentru toate partițiile, are o mulțime stabilă unică.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de cîteva definiții și leme. Spunem că o coaliție $ este *efectivă pentru o imputație x,* dacă

$$\mathbf{S}_{\substack{x_i < w(a') \\ ies}},$$

și *strict efectivă,* dacă

$$\mathbf{5]}_{ies}\ x_t<u(S).$$

10.3.5. LEMĂ. *Nici o imputație x nu poate domina o altă imputație y prin o coaliție formată dintr-un singur jucător.*

Demonstrație. Dacă imputația x domină y prin {i}, atunci $y_i<x_i$ *<.u{{i})* și deci y nu este o imputație.

10.3.6. LEMĂ. *Dacă* $x>_S y$ și $y_i>z_i$ *pentru orice i* e *S, atunci* $x>_S z$.

Demonstrația este evidentă.

10.3.7. LEMĂ. *într-un joc de patru persoane în care numerele* **| |P| |** *sînt toate diferite, pentru orice imputație x există cel mult o coaliție care este strict efectivă pentru x și poate realiza*' x.*

*> Autorul nu definește nicăieri sensul afirmației „coaliția S poate realiza imputația *x*". Este probabil că prin aceasta înțelege verificarea condiției î0.3.3, 3). *(N. T.)*

10.3.1. DEFINIȚIE. Un joc în forma *funcției de partiție* este o funcție v care asociază fiecărei partiții & = (P_na lui N un fc-vector

$$= (^(P_1), ®*(P_2), \ldots, ^ (P_t)).$$

Funcția de partiție dă deci cîștigul fiecărei coaliții din pre- supunînd că se ajunge la partiția (structura de coaliții) Ca și în teoria lui von Neumann și Morgenstern, ne interesează însă valoarea maximă pe care o coaliție $ și-o poate asigura independent de acțiunile celorlalți jucători. Aceasta este dată de

$$«(&) = \min_{se\ \&} v^9 (\$). \qquad (10.3.1)$$

Trebuie menționat că funcția de mulțime u nu este în

mod necesar superaditivă. Aceasta se explică prin aceea că, în unele cazuri, o coaliție între grupuri antagoniste poate să slăbească de fapt grupurile.

Ideea de imputație trebuie modificată după cum urmează.

10.3.2. DEFINIȚIE. Numim *imputație* pentru un joc *v* de *n* persoane în forma funcției de partiție un *n*-vector $x=(x_{lf}.. ,,x_n)$ care satisface condițiile:

1) $x_{\ell} > w(\{i\})$ pentru orice *i-,*

2) $\sum_{t=l}^{n} x < = £ v? (8)$ pentru o partiție *SP.*

Astfel, pentru aceste jocuri componentele unei imputații nu au întotdeauna aceeași sumă. De asemenea, ideea de dominare diferă în- trucîtva.

10.3.3. DEFINIȚIE. Spunem că imputația *x domină* imputația *y* prin coaliția $ (și notăm $x>_s y)$ dacă :

1) $^{x} < > Vi$ pentru *i e 8;*

2) $pi < u(S);$ »es

3) există o partiție astfel ca £ e ***9*** și

E = S (T).

de o infinitate de ori. Aceasta dă naștere unui „superjoc" ; o strategie în superjoc constă în alegerea unei strategii în fiecare partidă a jocului original în funcție de rezultatele obținute în partidele precedente. Pentru acest superjoc punctele de echilibru se definesc ca mai sus. Din păcate,

multe jocuri nu posedă puncte de echilibru „tari” nici în acest sens mai slab.

în sfîrșit, pentru aceste jocuri a fost definit un concept de valoare. Au fost propuse cîteva scheme diferite :

Shapley [10.13] obține valoarea Shapley, presupunînd că sînt permise plățile laterale. Apoi, dacă valoarea rezultată poate fi obținută și fără a se recurge la plăți laterale, ea este considerată drept valoare a jocului. Pentru alte jocuri noțiunea de valoare se extinde, pornind de la cerința ca ea să fie invariantă față de transformările liniare ale funcției de utilitate a oricărui jucător, care este suficientă pentru a determina o valoare pentru orice joc.

Harsanyi [10.4, 10.5] dă două modele înrudite de negociere, bazate pe o generalizare a axiomelor lui Nash pentru jocurile cooperative de două persoane.

Isbell [10.6] presupune că spațiul utilităților fiecărui jucător este mărginit (de forma [0,1]) și folosește un model de negociere care conservă rapoartele utilităților.

Miyasawa [10.10] dă o altă generalizare a modelului lui Nash.

Selten [10.12] studiază cîteva scheme pentru definirea axiomatică a valorii.

10.3. JOCURI DATE PRIN FUNCȚIA DE PARTIȚIE

în definiția funcției caracteristice a lui von Neumann — Morgen- stern se presupune că la formarea unei coaliții $ se ține seama de cea mai proastă situație posibilă care poate surveni, adică formarea coaliției complementare *N— S.* Deși aceasta este rezonabil din punctul de vedere minimax, este totuși evident că în multe cazuri coaliția *N— S* nu se va forma, datorită dificultăților de comunicare, ani-

mozităților personale între jucători, lipsei stimulentului sau multor altor motive. Ce se întîmplă dacă *N—S* nu se formează? Este evident că cîștigul pe care îl poate obține $ va depinde de structura particulară a coaliților formate. Astfel, într-un joc de vot, o coaliție care nu dispune de majoritatea absolută a voturilor poate să cîștige, pur și simplu, pentru că adversarii nu pot ajunge la un acord și ca urmare unii dintre ei se pot abține de la vot. Aceasta conduce la ideea funcției de partiție a unui joc.

10.2.1. DEFINIȚIE. Numim joc de *n* persoane *fără plăți laterale* o pereche *(v, H),* unde *H* este o mulțime convexă compactă din R^n, iar *v* este o funcție care asociază fiecărei submulțimi 8 a lui *N* = {1,... ,*n*} o submulțime a lui 12" și care are proprietățile :

1) Pentru orice *S,* mulțimea *v(S)* este convexă închisă.

2) Dacă *x ev(S)* și y_t *x,* pentru orice *i* e *S,* atunci *y e v(S).*

3) Dacă *SfiT = 0,* atunci *v(S)* n r(T)Qr($ ᵘ *T).*

4) *v(S)* 0 pentru orice *ScN.*

5) *x* e ®(N) dacă și numai dacă există *y eH* astfel ca *x < y.*

în această definiție, condiția 2) este o condiție de monotonie : dacă <8 poate garanta membrilor săi *x,* atunci le poate garanta în mod sigur cîștigurile mai mici *y.* Condiția 3) este forma adecvată a condiției de superaditivitate. Condiția 5) asigură că mulțimea *v(N)* nu este prea bogată; împreună cu condiția 3) (punînd *T=N—S),* aceasta garantează că fiecare mulțime *v(S)* nu este prea bogată.

Cu aceste definiții ale noțiunilor de imputație și funcție caracteristică este posibil să se definească relația de

dominare. Spunem că *x* domină *y (x>y),* dacă există o coaliție nevidă £ astfel ca *x* e *v(S)* și $x_(> y_($ pentru orice *i e S.* Mulțimile stabile și nucleul se definesc apoi exact ca în cazul plăților laterale.

Există unele rezultate asupra mulțimilor stabile ale jocurilor fără plăți laterale. Stearns [10.14] a arătat că orice joc de trei persoane posedă cel puțin o mulțime stabilă; în plus, aceste mulțimi au fost clasificate. Problema existenței mulțimilor stabile în general a fost rezolvată totuși în mod negativ: Stearns [10.15] a dat un exemplu de joc de șapte persoane care nu are mulțimi stabile.

S-au obținut și unele rezultate asupra nucleului unui joc fără plăți laterale. Un vector *x* e aparține nucleului, dacă pentru orice coaliție $ și orice *y* e *v(S)* există *i e S* astfel ca x_t y_t.

Este posibil să se trateze aceste jocuri și pornind de la forma normală în loc de funcția caracteristică. Tratînd jocurile necooperative, am definit un punct de echilibru ca un sistem de *n* strategii mixte cu proprietatea că nici un jucător nu poate cîștiga prin abaterea unilaterală de la strategia corespunzătoare. în cazul de față putem defini un *punct de echilibru tare* ca un sistem de *n* strategii (eventual corelate) cu proprietatea că nici o coaliție >8 nu poate obține o creștere în utilitate pentru toți membrii săi, dacă restul jucătorilor nu își modifică strategiile. Această definiție este totuși prea tare, în sensul că pentru majoritatea jocurilor nu există astfel de puncte. Aumann [10.1] tratează astfel de jocuri, presupunîndcăele sînt jucate în mod repetat

Să presupunem însă acum că ® este definit prin

$$v(S) = \begin{cases} \text{dacă X(\$) <} \\ 1, \text{ dacă X(\$)} \end{cases}$$

Este evident că acest *v* este funcție doar de X și deci <p[v]=X. Este însă ușor de văzut că *y.{8)* = 1, dacă și numai dacă X(5) = 1, și deci avem totodată

$$v(S) = \begin{cases} (\text{°} > \text{dacă } 9 < i\text{»} \\ [1, \text{dacă p. } (8) = 1, \end{cases}$$

astfel că trebuie să avem <p[®] = p. Această contradicție arată că pentru acest joc nu poate să existe valoarea Shapley <p[®]. Explicația este că șirul de valori Shapley ale jocurilor finite considerate mai sus nu are limită.

10.2. JOCURI FĂRĂ PLĂȚI LATERALE

Jocurile fără plăți laterale sînt o altă generalizare posibilă a jocurilor tratate în capitolele 8 și 9. în aceste două capitole am făcut ipoteza esențială că utilitatea poate fi transferată liniar între jucători. Aceste plăți laterale simplifică în mod considerabil descrierea jocului, în loc să considerăm toate rezultatele posibile care pot fi obținute de o coaliție *S,* este suficient să dăm numai cîștigul total pe care îl poate obține & și să menționăm că acesta poate fi repartizat în orice mod între membrii săi. Forma funcției caracteristice devine mult mai complicată, dacă nu sînt permise plăți laterale.

în acest caz funcția caracteristică, definită pentru submulțimile lui *N,* are mulțimi drept valori. Să considerăm mai întîi utilitatea maximă pe care un jucător *i* o poate obține în mod sigur, chiar acționînd împotriva tuturor celorlalți jucători. ®(A) nu mai este ca pînă acum un număr, ci o mulțime de imputații, anume mulțimea tuturor n-vectorilor $\{x_u \ldots, x_n)$ pe care mulțimea de jucători *N* le poate obține acționînd împreună. Atunci mulțimea *v(S)*

constă din toți vectorii *x,* pentru care coaliția £ este capabilă să garanteze membrilor săi cel puțin cotele lor individuale din *x.* [De exemplu mulțimea va consta din toți vectorii *x,* pentru care «J].
Deoarece
sînt admise loteriile, este evident că fiecare mulțime *v(8)* este convexă ; nu este evident că aceste mulțimi trebuie să fie închise, dar vom presupune totuși aceasta, ceea ce nu este nerezonabil.

părțită printr-un factor constant pentru a asigura că

?M([o,i]) = r([o,ij).

10.1.2. Exemplu. Fie *X(8)* măsura Lebesgue a mulțimii S și fie *tj.(8)* definită prin

p.(8) = 2 a?d,r.

Am mai văzut că, dacă *v* este o funcție care depinde numai de X, atunci cp[r] = X; analog, dacă *v* depinde doar de [i, atunci <p[v] = p. Să presupunem acum că

$$v(8) = u.\ (S)\ \}.\ (S) \tag{10.1.8}$$

pentru orice *8 e f).* Notînd = ,$u^2/2$, $v_2 = X^2/2$, avem

$$v_3 = {}_v 4\text{- i>i} + v_2 = (X + ji)^2/2.$$

Datorită aditivității rezultă

$$9\ [®] = 9\ [®_3] - 9\ [®1] \sim$$

Deoarece X, p. și X-ț-ji sînt măsuri, membrul al doilea al acestei egalități este ușor de evaluat. într-adevăr, v_3 depinde numai de X-J-ji; în plus i'_3 ([0, 1]) = 2 și [X + |i] ([0, 1]) = 2, deci

$$9 \qquad + ,u. \tag{10.1.9}$$

Mai departe, i\ depinde numai de u și avem $i^{-}{}_1$ ([0,1]) = 1/2, deci

$$9\ [®il = ,^/2 \text{ și analog} \tag{10.1.10}$$

$$9\ M = {}^z/2\text{-} \tag{10.1.11}$$

Combinînd aceste egalități, obținem

$$9\ [1'] = (X + u)/2,$$

drept valoare Shapley a jocului *v* definit prin (10.1.8). în mod asemănător putem determina valoarea Shapley a oricărui polinom de u. și X, sau a unui polinom care depinde de un număr finit de măsuri.

cerem numai u(A)> T(A) pentru orice AcS, deoarece aceasta poate conduce la relația cr> *a.* Alegem compromisul de a cere ca inegalitatea c(A) >T(A) să fie satisfăcută pentru toate mulțimile *A* din 0, pentru care

$$\sup \{r(A \cup -B) — v(B)\} > 0. \text{ Beo}$$

Aceasta ne permite de fapt să facem abstracție de mulțimile „mici" (de exemplu finite).

Cu aceste definiții ale noțiunilor de imputație și dominare, mulțimile stabile se definesc exact ca pentru jocurile finite. Nu sînt cunoscute prea multe despre mulțimile stabile ale acestor jocuri — ca și despre mulțimile stabile ale jocurilor cu un număr finit, dar mare, de persoane, exceptînd unele cazuri particulare. De exemplu, în jocuri simple există mulțimi stabile : dacă $ este o coaliție cîștigă- toare minimală, atunci mulțimea tuturor imputațiilor cr nule pe [0,1]—<8 este stabilă. (Presupunem aici că jocul este normalizat (0,1).)

Deși pînă în prezent s-a publicat puțin asupra mulțimilor stabile, există un număr însemnat de lucrări consacrate generalizării valorii Shapley pentru jocuri cu un continuum de jucători.

în general, axiomele SI—S3 prin care am definit valoarea Shapley în cap. 9 pot fi direct adaptate. Se întâmpină o anumită dificultate în cazul lui S2 (axioma

simetriei); permutările lui *N* considerate acolo trebuie înlocuite acum prin transformări măsurabile biunivoce ale segmentului [0,1] în el însuși. Deși la prima vedere aceasta nu pare să ridice vreo dificultate, vom vedea că în anumite cazuri degenerate ea conduce la o contradicție.

Determinarea efectivă a valorii pentru un joc particular dat este desigur mult mai dificilă, deoarece formula (9.1.4) nu se poate adapta pentru jocul infinit.

în general, metoda folosită pentru a determina valoarea unui joc arbitrar constă în partiționarea intervalului [0, l]într-un număr finit de submulțimi (nu neapărat intervale), considerarea acestor submulțimi ca jucători diferiți și calcularea valorii Shapley pentru jocul finit corespunzător. Luînd partiții din ce în ce mai fine ale lui [0, 1], valoarea Shapley ?[v] (o funcție de mulțime aditivă, și nu un vector) se definește ca limita valorilor acestor jocuri finite (dacă această limită există).

Să presupunem că există o măsură definită pe 0, astfel ca *r(S)* să depindă numai de u(8). De exemplu putem avea *v(S)* = [fx(8)J^2. Dacă *u.(8)* = u(T), din axioma simetriei rezultă că avem 9 [v](8) = = <p[v](T); dar fiindcă <p[r] trebuie să fie o funcție de mulțime aditivă, urmează că ?[r] trebuie să fie egală cu măsura a, im-

este aditivă și deci un astfel de joc este neesențial. în locul acestor condiții redefinim *normalizarea* (0, 1) prin condițiile :

«([0,1]) =1, (10.1.1)

«(8) > 0, dacă Se 0. (10.1.2)

Dacă a este o măsură pe 0 și a < *v.* (10.1.3)

atunci a = 0

O reformulare a condiției (10.1.3) se obține în felul următor. Să observăm că, dacă *v* > 0, atunci funcția de mulțime unde infimumul se ia pentru toate șirurile de mulțimi *S,* din 0 astfel ca(jSDS, este o măsură exterioară. Superaditivitatea lui *v* implică că acest infimum se obține luînd partiții „fine" ale mulțimii $; aceasta înseamnă că toate elementele din 0 sînt măsurabile față de a. Prin urmare a este o măsură pe 0. Se vede însă cu ușurință că a este cea mai mare măsură astfel ca a<«. Prin urmare, condiția (10.1.3) se poate înlocui prin :

a(S) = inf £ (10.1.4)

Dacă a este definită prin (10.1.4), atunci a = 0. (10.1.5)

Trebuie să notăm că, chiar dacă *v* nu este nenegativă, se poate defini într-un mod relativ diferit o măsură cu semn (care ia atît valori pozitive, cît și negative) a.

Această măsură cu semn a înlocuiește numerele «({7}). Astfel o *imputație* pentru jocul *v* se definește ca orice măsură (cu semn) o, astfel ca

*([0,1]) =«([0,1]), (10.1.6)

o(S) > a(8) pentru Se0. (10.1.7)

Dacă jocul este normalizat (0,1), condiția (10.1.7) se înlocuiește desigur cu faptul că a este o măsură (în loc de măsură cu semn).

Relația de *dominare* trebuie de asemenea redefinită. Pentru ca imputația <r să domine imputația T (T) prin mulțimea *S,* trebuie desigur să avem *a(S)<,v(S)* ;nu este însă posibil să cerem cau(A) *>x(A)* pentru orice *A* c *8,* deoarece aceasta sigur nu poate fi verificată, dacă 8 este nenumărabilă și toate mulțimile formate dintr-un singur punct aparțin lui 0. Pe de altă parte, este în mod cert insuficient să

10

MODIFICĂRI ALE CONCEPTULUI DE JOC

10.1. JOCURI CU UN CONTINUUM DE JUCĂTORI

In încercarea de a aplica teoria jocurilor de *n* persoane în analiza economică se vădește clar că jocurile cu un număr mic de jucători nu sînt adecvate pentru a reprezenta situațiile pieței libere (deschise concurenței). în acest scop sînt necesare jocuri cu un număr de jucători atît de mare, încît fiecare jucător în parte să aibă un efect neglijabil asupra cîștigurilor celorlalți jucători. Cît de mare trebuie să fie acest număr? Răspunsul este: egal cu „numărul" punctelor unui segment. (în general se ia intervalul unitate

[0,1].) Formal jocul se definește în felul următor.

10.1.1. DEFINIȚIE. Prin *joc cu un continuum de jucători* înțelegem o G-algebră 0 de părți ale intervalului [0,1], împreună cu o funcție cu valori reale *v,* definită pe 0, care satisface condițiile

1) $v(0) = 0$,

2) $v(A \cup B) > r(A) + v(B)$, dacă $A \cap B = 0$.

Elementele intervalului [0,1] sînt numite *jucători,* iar elementele lui 6 sînt numite *coaliții.*

Acum trebuie să procedăm cu mult mai multă atenție decît în cazul jocurilor finite. De exemplu, definiția normalizării (0,1) trebuie modificată: acum nu este suficient să cerem ca t'({®}) = 0 pentru orice punct *x* e [0,1] și *v* ([0,1]) = 1; aceste condiții sînt satisfăcute de exemplu luînd drept *v* măsura Lebesgue, dar o măsură

PROBLEME

1. Valoarea Shapley a unui joc cu sumă constantă *D* este

$$\varphi_i [v] = 2 \sum_{\substack{S \subset N \\ » \in S}} \left[\frac{(n-s)!\,(s-1)!}{n!} \right. v(S)$$

- v (N).

2. Un joc *v* de n persoane se numește *joc cu m cote-părți,* dacă există un vector o =
= (wj, . care satisface condiția oij = *v (N)* și astfel ca a>, = *v(M)*
i£N *igJI*
pentru orice coaliție de *m* persoane *M*c.V, și *v* (S) = y *v* ({*}) pentru
orice coaliție S ies
de s persoane (s *zfz m).* Spunem că jucătorul *i* este *slab,* dacă < o((i}>. O structură de coaliții se numește *structură de coaliții maximală* (s.c.m.), dacă conține numărul maxim posibil (adică [n/m]) de coaliții de *m* persoane.

a) Fie *u* un joc cu *m* cote-părți co și nici un jucător slab. Dacă este o s.c.m., atunci c.c.c.r. (x este stabilă (adică aparține mulțimii de negocieri //₀) dacă și numai dacă x, = w; pentru orice *i* care aparține unei coaliții de *m* jucători din *ff-*

b) Fie *v* un joc cu *m* cote-părți <o și fie 7Î mulțimea jucătorilor slabi. Dacă n =
= *qm + r,* unde *O^rCm* și + 1, și dacă este o s.c.m., atunci c.c.c.r. (x; este stabilă dacă și numai dacă x, = *v* ({i}) pentru orice fe Ti, și Xj^coj pentru orice ie N-7?.

3. Pentru un joc u de n persoane și o c.c.i.r. (x; ^") date, numim *surplus maxim* al iui *i* contra lui *j* numărul s_{is} definit prin

$$Sjj = \max_{D} e\ (D),$$

unde *e (ᶜ)i* este *excesul* lui D și maximul se ia după toate coalițiile *D* astfel ca *í* e *D* dar *j$D.* Spunem că jucătorul *i* este preponderent față dej, dacă și *Xj> o* ({j}.
Spunem că jucătorii *i* și *j* sînt *in echilibru,* dacă nici unul nu este preponderent față de celălalt.

Nucleul este mulțimea tuturor c.c.i.r. (x; ^"), pentru care oricare doi jucători care aparțin aceleiași coaliții sint in echilibru.

a) Pentru orice structură de coaliții există *x* astfel ca (x; ^")6 jf.

b) JfCJjti[0].

c) Dacă *v* este un joc simplu cu sumă constantă, iar este de forma {S, T_v .... Tp}.

unde S este o coaliție ciștigătoarc minimală, atunci (x; dacă și numai dacă

$$p(S)\text{- y } v\,(\{;\}) \quad \text{---------} + V(\{i\})$$

pentru orice *i* £ .*> (unde s desemnează numărul elementelor din *S).*

■5. Demonstrați teorema 9.3.2.

5. Demonstrați teorema 9.3.4.

6. Arătați că orice joc de patru persoane cu sumă constantă este un joc cu cote- părți. Determinați toate perechile A-stabile pentru *k* = 1, 2, 3.

7. Fie *v* jocul din problema 8.7. Arătați că, pentru orice structură de coaliții netri

vială mulțimea tuturor *x* astfel ca (x; ^") [e] este vidă, dar mulțimea tuturor x astfel ca (x ; este nevidă.

Dificultatea principală legată de ^-stabilitate constă în general în alegerea unei funcții ip acceptabile. Dacă este prea restrictivă, vor exista multe perechi (rezultate) stabile. Dacă însă nu este prea restrictivă, este posibil să nu existe nici o pereche stabilă, sau numai nucleul să fie iț-stabil. în această direcție nu au fost obținute rezultate asupra ^-stabilității.

O posibilitate „rezonabilă" de alegere a lui ar fi așa-numita *fc stabilitate,* unde fc este un număr întreg pozitiv. în acest caz este definită prin aceea că 8 e (^"), dacă și numai dacă există *Tzf* astfel ca *8* A *T* = (8— *8)* să aibă cel mult fc elemente.

Pentru astfel de funcții țp, dăm fără demonstrație următoarele rezultate.

9.3.2. TEOREMĂ. *Orice joc de n persoane cu sumă constantă este (n-2)-instabil, adică mulțimea perechilor (n—2)stabile este vidă.*

9.3.3. DEFNIȚIE. Un joc *v* de *n* persoane se numește *joc cu cote- părți,* dacă există un vector co = (co_n. . .,*u*>$_n$) astfel ca co,- = *v (N)*

i

și v({i, j}) - co_j + co; pentru orice *i, je* A^7, *i j.* într-un astfel de joc un jucător *i* este *slab,* dacă co, <

Este ușor de văzut că un joc cu cote-părți are cel mult un jucător slab, deoarece

$$v(\{«, j\}) > v(W) + ®(\{\})•$$

9.3.4. TEOREMĂ. *Fie o pereche kstabilă într-un joc de n persoane cu cote-părți. Dacă numărul n este impar sau dacă n este par și* fc>2, *atunci x=* co. *Dacă*[†] *n este par și k = 1, atunci orice T* G *ST are un număr par de elemente și, în plus,*

X = **S** “i-
ier «er

în sfîrșit, un joc cu cote-părți care are un jucător slab este k-instabil pentru orice k.

---

† Ultima parte a enunțului este incorectă. Enunțul corect, conform [9. 3], este : ... Dacă *n* este par și *k* = 1, atunci fie x = co, fie orice are un nu
măr ... ”. (V. Ț.)

cu imputația (1—x_3 — *s,* O, a?$_3$+ e, O, 0), unde *0<e<*x_2—x_3, și este ușor de văzut că jucătorul 2 nu are nici o contraobiecție. In baza simetriei rezultă că, pentru acest singura imputație *x* astfel ca *(x; e* este

$$x_4 = 0, \tag{9.2.14}$$

$$x_2 = x_3 — x_4 = x_5 = {}^{\ddagger\,\S}l_i. \tag{9.2.15}$$

9.3. ^-STABILITATE

Un punct de vedere puțin diferit asupra procesului negocierilor conduce la conceptul de ^-stabilitate. Ca și în cazul considerării mulțimii de negociere, prin *rezultat* al jocului se înțelege o pereche *(x*; ^"), unde *x* este un vector de cîștiguri și este o structură de coaliții. Totuși, ideea care stă la baza conceptului de <p-stabilitate este considerabil mai simplă; pe scurt, se iau în considerație obiecții, dar nu și contraobiecții. Deoarece acest mod de a înțelege stabilitatea ar conduce la o mulțime de rezultate stabile mult prea mică (vidă ex- ceptînd nucleul), limităm numărul obiecțiilor, convenind că numai anumite coaliții pot obiecta contra unui rezultat dat.

---

‡ **s** > *v (S)* pentru orice 8 e tp (^"), *ies*
§ x_t >*v ({i}),* dacă *{i} $*

Condiția 1) stabilește că nici una dintre coalițiile „admisibile" £ (a căror formare este permisă) nu este capabilă să submineze rezultatul (a?; ^). Condiția 2) arată că nici un jucător nu va intra într-o coaliție netrivială decît dacă prin aceasta obține mai mult decît valoarea sa minimax *v* ({i}).

Din punct de vedere formal, este dată o funcție ip, care asociază fiecărei partiții a lui A o colecție de submulțimi ale lui A. Astfel, dacă este o partiție, <p(^") este o colecție de coaliții. Intuitiv, <8 e ip(^") dacă și numai dacă este permisă formarea coaliției $ din structura de coaliții actuală

9.3.1. DEFINIȚIE. Fie <p o funcție care asociază fiecărei partiții o colecție de coaliții. Spunem că perechea (a?; J"), unde *x* este o imputație, este ^-*stabilă,* dacă și numai dacă :

rezultă că *(x) < x,* pentru orice *i,* și deci avem de fapt C_t (5) = pentru toți *i.* Aceasta înseamnă că pentru fiecare *i* există y^{Si} e *Eț (!•)* astfel ca $y_k = £_k$. Prin urmare, e *Eț (*£) pentru orice *i* și *j.* Deci, în (' ; y) nici un jucător nu este mai tare decît altul. Aceasta înseamnă desigur că (*e Jt'j'.*

9.2.15. Exemplu. Considerăm jocul simplu de cinci persoane normalizat (0, 1), în care coalițiile cîștigătoare minimale sînt {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1,5} și {2, 3, 4, 5}. Vom considera două tipuri de structuri de coaliții, anume structurile în care există coaliția [1, 2} și cele în care există coaliția {2, 3, 4, 5}.

Să presupunem că există coaliția {1, 2} și că ceilalți jucători nu formează alte coaliții, adică *ST* = {{1, 2}, {3}, {4}, {5}}. Mulțimea c.c.i.r.-ilor va consta din toate (a;;^"), unde *x* este un vector cu $x_4 + x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, ^>0, a?$_2$>0. Dacă >3/4, atunci rezultă a>$_2$<l/4 și deci jucătorul 2 poate obiecta cu imputația (0,1/4, 1/4, 1/4, 1/4). Este ușor de văzut că jucătorul 1 nu va avea nici o contraobiecție. Dacă însă ^<3/4, atunci orice obiecție a lui 2 va atribui unuia dintre partenerii săi o valoare mai mică decît 1/4. Dacă de exemplu ,r$_3$<l/4, atunci jucătorul 1 poate contraobiecta cu (3/4, 0, 1/4, 0, 0). Asemănător, dacă a?$_1$<l/2, atunci jucătorul 1 poate obiecta de exemplu cu (1/2, 0,1/2, 0, 0) și 2 nu are nici o contraobiecție. Dacă însă a?! >1/2, atunci orice obiecție *y* a jucătorului 1 va atribui jucătorilor 3, 4, 5 un total mai mic decît 1/2 și deci jucătorul 2 poate contraobiecta cu *z* = (0, 1/2, y_3+ e$_3$, ?/$_4$-j- e$_4$, y$_6$-ț- e$_5$). Astfel, pentru *ST* dat mai sus, (a?;^·) va aparține lui dacă și numai dacă *x* satisface condițiile

$$+ «2 = 1, \qquad (9.2.10)$$

$$x_4 > 1/2, \qquad (9.2.11)$$

$> 1/4,$

$,r_3 = x_4 = x_s =$ (9.2.1

Caracterizări analoage se obțin prin simetrie, dacă se formează una dintre coalițiile {1, 3}, {1, 4} sau {1, 5}.

Să presupunem acum că se formează coaliția {2, 3, 4, 5}. Considerăm mulțimea tuturor c.c.i.r. *(x*; ^"), unde *x* este un vector nenegativ cu suma componentelor egală cu unu și $x_4 = 0$, iar^- = {{1}, {2,3,4,5}}. Dacă am avea $£_2 > r_3$, atunci jucătorul 3 poate obiecta contra lui 2

9.2.13. LEMĂ. *Dacă (x-,J~) este o c.c.i.r., atunci relația > este aciclică.*

Demonstrație. Este evident că, dacă *i* și *Ic* aparțin nnor coaliții diferite, atunci *i ~ k.* Să presupunem acum că o coaliție *Sj* este formată din jucătorii *l,2,...,t* și că 1 2 3 1.

Astfel, jucătorul *i* (i=l,.../) are o obiecție, care nu poate fi contracarată, împotriva jucătorului *i* + 1 (unde *t* + 1 se identifică cu 1). prin coaliția $C_{(}$. Fie C_{ia} coaliția (dintre C_k, C_2, ..., C_t) care are excesul maxim. Vom arăta că în acest caz i_0 poate contraobiecta împotriva lui i_0—1 (mod *t)* prin coaliția C_{io}, ceea ce încheie demonstrația. într- adevăr, jucătorul i_0—1 (mod *t)* are la dispoziția sa numai suma $e(C_{i(l}\ i)$ pentru a forma coaliția care obiectează; jucătorul i_0, avînd la dispoziție suma $e(C,_0) > e(C_{io}\ i)$, poate întotdeauna contraobiecta, exceptînd doar cazul cînd i_0—1 (mod *t) e* Ci_a. Eepetînd acest argument, rezultă i_0—2 (mod t) e $C_{<0}$ etc. și în cele din urmă f_0+l (mod *t) e* C_{io}, ceea ce este evident imposibil.

9.2.14. DEMONSTRAȚIA TEOREMEI 9.2.9. Fie (T; *ST}* o c.c.i.r. Notăm prin *(y^s>, x^N~^s>* c.c.i.r., care se obține din aceasta păstrînd neschimbate componentele a\ pentru *i e N — S,* și înlocuind componentele x_k prin y_k pentru *h e 8,-,*

unde $y_k > 0$ și £ $y_k = v$ *(Sj).*

Fie Ej *(x)* mulțimea punctelor y^{Si} astfel ca, în c.c.i.r. *(y^s>, x^N~^Si; ^),* jucătorul *i ți* e Sj) *nu este mai slab* decît un alt jucător. Mulțimea *E] ți(x)* este închisă și conține mulțimea $x_t = 0$ (deoarece, dacă $x_f = 0$, *i* poate întotdeauna contraobiecta, ca o coaliție formată dintr-un singur jucător). Definim funcția

$$ți(x) = Xi + \max_{V^s > EEj(X)} \min_{k\ ESj} ți x_k - y_k),$$

unde S_j este coaliția din care conține pe *i.* Se vede cu ușurință că C_t *ți(x)* este o funcție continuă; în plus, deoarece din $y_t = 0$ și $y_k > x_k$ pentru toți *ke8j, k=fci,* rezultă y^{Si} e E} (T), funcția *Ci ți(x)* este nenegativă.

Conform lemei 9.2.13, pentru orice *x* e *X ți3~)* și orice 8_f e *3T* există un *i* e *S,* care nu este mai slab decît nici un *k* e S;. Astfel e *E) ți(x)* și deci C_t *ți(x)> x_t.* Atunci, conform lemei 9.2.10, există un punct astfel ca Cț (£) > pentru orice *i* e *X.*

Din faptul că

$$\mathbf{X}_{ke.Sj} {}^{x_k} = \mathbf{X}_{keSj} {}^{V_k}$$

9.2.10. LEMĂ. *Fie* $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ *funcții continue nenegative, definite pentru* x e $X(ZF)$. *Dacă pentru orice* x e X *și orice* S_s *există un jucător ieSj astfel ca* $c_t(x) > x_t$, *atunci există un punct* E = . ,,y el (^-) *astfel ca* $c_t\{E) > E$, *pentru* $i = 1, \ldots, n$.

Demonstrație. Pentru x e X (^") și i e N notăm

$$Xi — \begin{cases} \text{dacă } x_{(} c_t(x), \\ \text{dacă } Xi < Ci(x), \end{cases}$$

și, dacă i e SJ, punem

$$_y. = Xi - di + (1/s_3.) £ d_k,\ k\ ț Sj$$

unde Sj este numărul elementelor din Este evident că y este o funcție continuă de x. în plus, se observă că $y, > 0$, căci $Xi — dț$ și $d_k(x)$ sînt toate nenegative. în sfîrșit avem

$$\text{X } Vi = £ Xi = v(S_j)$$
$$\text{i } ESj \qquad i\ GSj$$

și deci y e X.

Vom arăta acum că dacă există i astfel ca $>c_{ț}(x)$, atunci x nu este un punct fix al aplicației y. într-adevăr, în acest caz avem $d_t > 0$, și, deoarece prin ipoteză există un keS, astfel ca $x_k < c_k(x)$, și deci $d_k = 0$, rezultă

$$y_k > x_k + dils_j > x_k.$$

Întrucît $X(y)$ este o mulțime convexă compactă și aplicația y a acestei mulțimi în ea însăși este continuă, există, conform teoremei de punct fix al lui Brouwer, un punct E astfel încît $y(E) = E$- După cum am mai văzut, acest punct trebuie să'verifice condițiile lemei, *cfE).*

9.2.11. DEFINIȚIE. Spunem că jucătorul i este *mai tare*

decît Ic în (x-, y), dacă *i* are o obiecție împotriva lui fc, care nu poate fi contracarată. Notăm aceasta prin *i^k.* Spunem că jucătorii sînt *egal de tari* și notăm *i ~ k,* dacă nici *i^>k,* nici *k^>i.*

9.2.12. DEFINIȚIE. Fie *țx-, ^)* o c.c.i.r. și fie Co coaliție. Numim *exces* al coaliției C valoarea

jucători o sumă cel puțin egală cu aceea atribuită lor princ.c.c.r. obiectată. Să notăm că poate fi necesar pentru coaliția *L* să folosească ca parteneri o parte din membrii lui *K*; ea nu poate însă să îi folosească pe toți.

9.2.6. DEFINIȚIE. O c.c.c.r. se numește *stabilă,* dacă,
pentru orice obiecție a unei mulțimi *K* împotriva unei mulțimi *L, L* posedă o contraobiecție împotriva lui *K.* Mulțimea *Ji* a tuturor c.c.c.r. stabile se numește *mulțimea de negociere.*

Se poate încă discuta asupra definiției mulțimii negocierilor și se pot lua în considerație cîteva modificări ale acesteia. De exemplu, putem conveni că numai jucătorii în parte pot face obiecții sau că este suficient ca un singur membru din *L* să posede o contraobiecție.

9.2.7. DEFINIȚIE. *Mulțimea de negociere* este mulțimea tuturor c.c.c.r. *(x; 3"}* în care, ori de cîte ori o mulțime *TL* are o obiecție împotriva unei mulțimi *L,* cel puțin un membru din *L* are o contraobiecție.

9.2.8. DEFINIȚIE. *Mulțimea de negociere* este mulțimea tuturor c.c.c.r. *(x|* în care, dacă un jucător *i* are o obiecție împotriva unei mulțimi *L,* atunci *L* are o contraobiecție împotriva lui *i.*

Este ușor de văzut că *Jl* C și C Relația dintre Ji_x și *Jlț* nu

este clarificată.

în sfîrșit, lucrînd cu c.c.i.r. în loc de c.c.c.r., se pot considera mulțimile de negociere *Jtp* definite analog mulțimilor

j, *vfl* g •

Spre deosebire de nucleu, care este adeseori vid, se poate vedea că nici una dintre mulțimile de negociere introduse mai înainte nu este vidă. într-adevăr, presupunînd că jocul este normalizat (0,1), c.c.c.r. (T; unde *x* = (0, 0, ...,0) și *3~* = {{1}, {2},..., {n}}, este evident stabilă. Pe de altă parte, aceasta reprezintă cazul absenței totale a cooperării. Ar fi deci interesant de știut dacă, pentru o structură de coaliții *fT* mai complicată, mulțimea negocierilor conțin$_e$ cel puțin un element. în acest sens avem următorul rezultat remarcabil.

9.2.9. TEOREMĂ. *Pentru orice structură de coaliții a unui joc de n persoane există cel puțin un vector x astfél ca (x,*

Pentru demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de cîteva leme și definiții. Presupunem că jocul este normalizat (0,1). Pentru o structură de coaliții dată, *ST,* notăm cu X(^) mulțimea tuturor *n*-vectorilor *x* pentru care *(x, ST)* este o c.c.i.r. Lema următoare a fost dată de B. Peleg.

1/2, adică determinînd cîștigurile (0, 1/2, 1/2). Jucătorul 2 dispune astfel de o contraamenințare, care „apără" cîștigul său de 1/2.

Pentru a formula matematic această idee, începem prin definirea noțiunii de parteneri.

9.2.3. DEFINIȚIE. Fie = *{T$_u$ ..., T$_m$}* o structură de coaliții și fie *K* o coaliție. Prin *parteneri ai lui K în ST* înțelegem elementele mulțimii

F(Z;^) = {i|ie T, A-^^0}-

Jucătorul *i* este deci partener al lui *K* în dacă aparține aceleiași coaliții T_k ca și unul dintre membrii lui *K.* (Observați că orice membru al lui *K* este un partener al lui *K).* Ideea fundamentală este că, pentru ca membrii lui *K* să obțină partea lor din c.c.c.r. (*; ^), ei au nevoie de acordul partenerilor lor și numai al acestora.

9.2.4. DEFINIȚIE. Fie *(x-, ^~)* o c.c.c.r. pentru un joc *v* și fie *K* și *L* submulțimi disjuncte nevide ale unei coaliții T_k e *ST.* Numim *obiecție* a lui *K* împotriva lui *L* o c.c.c.r. *(y;* care satisface condițiile

P (Z; n i = 0, **(9.2.4)**

Vi > ^{x}i pentru orice *i* e *K,* (9.2.5)

$y_t > x_t$ pentru orice *i e P (K-, <%).* (9.2.6)

9.2.5. DEFINIȚIE. Fie (J;J)O c.c.c.r., fie *K, L* ca în definiția 9.2.4 și fie *(y;* o obiecție a lui *K* împotriva lui *L.* Numim *contraobiecție* a lui *L* împotriva lui *K* o c.c.c.r. *(z;* TT) care satisface condițiile

*(9.2.7)

$ţz_f > x_t$ pentru *ie P (L-, ■f),* **(9.2.8)**

$z_t > y_t$ pentru *ie P* (Z; r)C|P(Z; ^). **(9.2.9)**

Pe scurt, membrii lui *K* pretind, prin obiecția lor împotriva lui *L,* că pot obține mai mult prin trecerea la o nouă c.c.c.r., și că noii lor parteneri consimt la această schimbare. Membrii lui *L* pot contra- obiecta, dacă pot găsi o a treia c.c.c.r., în care ei și toți partenerii lor primesc sume cel puțin egale cu sumele inițiale rz\. Dacă pentru

aceasta au nevoie de unii dintre partenerii lui *K,* ei oferă acestor

unde *ST* este o structură de coaliții, iar *x* un n-vector care satisface condițiile

(fc = l, (9.2.1)

ier*

Să vedem acum ce fel de configurații de cîștiguri sînt acceptabile. **O** cerință naturală pentru o configurație de cîștiguri este de a fi *individual rațională,* adică de a verifica condițiile

> *v* ({i]) pentru toți *i* e *N.* (9.2.2

O altă cerință posibilă este de a fi *coaliționat rațională,* în sensul că nu se poate forma o coaliție T_k, dacă una dintre subcoali- țiile sale poate obține mai mult decît cîștigul atribuit de vectorul *x*; cu alte cuvinte,

£ *v (S)* pentru orice & C T_ke$~. i es (9.2.3

Este evident că condiția (9.2.3) este mai tare decît (9.2.2). Pe de altă parte, necesitatea de a impune (9.2.3) nu este atît de evidentă ca pentru (9.2.2). Fără a discuta în detaliu argumentele pro și contra condiției (9.2.3), vom spune că o configurație de cîștiguri este coaliționat rațională (c.c.c.r.), dacă satisface condiția (9.2.3), și individual rațională (c.c.i.r.), dacă satisface numai (9.2.2). Ne vom ocupa mai întîi de c.c.c.r.

Să presupunem că prin negocieri s-a ajuns la o c.c.c.r. în ce condiții este aceasta stabilă? Este evident că dacă c.c.c.r. este o imputație din nucleul jocului,ea este stabilă în sensul că nici o coaliție nu are atît dorința, cît și posibilitatea de a o modifica. Deoarece nucleul este însă

adeseori vid, nu putem pretinde atît de mult, adică nu putem cere ca c.c.c.r. să aparțină nucleului.

Să considerăm de exemplu jocul simetric de trei persoane tratat în § 8.4. Am văzut că, dacă se formează coaliția {1, 2}, atunci cîști- gurile sînt foarte probabil (1/2, 1/2, 0). în orice caz unul dintre cei doi jucători ai coaliției poate să pretindă mai mult și să amenințe cu coalizarea cu jucătorul 3, dacă cererea nu îi este satisfăcută. De exemplu, jucătorul 1 poate amenința cu formarea coaliției {1, 3}, determinînd să zicem cîștigurile (3/4, 0, 1/4). Jucătorul 2 poate însă contracara această amenințare, declarînd că în acest caz el va încerca să formeze coaliția {2, 3}, oferind jucătorului 3 cîștigul jucătorul 3 posedă mai multe acțiuni ca 2. în realitate acest fapt nu este surprinzător : pur și simplu jucătorul 3 nu are posibilități mai mari decît jucătorul 2 să participe la o coaliție cîștigătoare; jocul (conceput ca funcție caracteristică) tratează acești doi jucători în mod simetric. Se mai observă că importanța jucătorului 4 este mai mare decît cea corespunzătoare procentului acțiunilor sale, iar a jucătorului 1 este mai mică decît cea corespunzătoare acțiunilor sale.

9.1.9. Exemplu. Reluăm exemplul precedent, cu modificarea că jucătorii posedă respectiv 10, 30, 30 și 30% din acțiuni. Se vede că oricare doi dintre jucătorii 2, 3, 4 formează o coaliție cîștigătoare, în timp ce jucătorul 1 este lipsit de orice importanță, neputind aduce nimic nici unei coaliții. Valoarea jocului este vectorul (0,1/3, 1/3, 1/3); acțiunile jucătorului 1 sînt deci nefolositoare, iar acțiunile suplimentare ale jucătorului 4 nu îi aduc acestuia nici un avantaj față de jucătorii 2 și 3.

9.2. MULȚIMEA DE NEGOCIERE

Una dintre dificultățile legate de conceptele de soluție studiate pînă aici constă în aceea că, în general, ele nu lămuresc procesul de negociere care are loc efectiv în cursul desfășurării jocului. Mulțimile stabile sînt date ca „norme de comportare", iar valoarea Shapley reprezintă o anumită valoare medie. Mulțimea de negociere se obține, dimpotrivă, tocmai luînd în considerație discuțiile (negocierile, tratativele) care pot avea loc efectiv în decursul unei partide a jocului. Pentru aceasta trebuie să ținem seamă de presiunile (amenințările) și contrapresiunile, ce pot fi exercitate de diferiți jucători.

9.2.1. DEFINIȚIE. Prin *structură de coaliții* pentru un joc de » persoane înțelegem o partiție $ST = \{T_k, T_m\}$ a mulțimii N a jucătorilor.

Intuitiv, o structură de coaliție reprezintă o descompunere a mulțimii N în coaliții mutual disjuncte. Să presupunem că în urma negocierilor s-a ajuns la o astfel de structură și că fiecare coaliție T_k formată primește cîștigul $v(T_k)$, care urmează să fie repartizat între membrii săi. Cum trebuie repartizată această sumă .'

9.2.2. DEFINIȚIE. Se numește *configurație de cîștiguri* o pereche

(® î ⁼ (^"1, • • • *ı* • • • > deja membrii coaliției T — {i} și numai aceștia; cîștigul primit este cu alte cuvinte valoarea marginală cu care acest jucător contribuie la cîștigul total al coaliției T. Atunci valoarea Shapley <Pj[®J este tocmai valoarea medie a cîștigului jucătorului i în această schemă aleatoare.

Dacă v este un joc simplu, formula valorii Shapley se simplifică, într-adevăr, termenul $v(T) - v(T - \{i\})$ ia în

acest caz numai valorile 0 sau 1, și anume ia valoarea 1, dacă și numai dacă T este o coaliție cîștigătoare, dar T — {i} nu este cîștigătoare. Avem deci

$$M = \pounds_{T} (t - 1)!\ (n - t)\ l/n\ !,$$

unde sumarea se face pentru toate coalițiile cîștigătoare T pentru care T — *{i}* nu este cîștigătoare.

9.1.8. Exemplu. Să considerăm o societate pe acțiuni cu patru acționari, care posedă respectiv 10, 20, 30 și 40% din acțiuni. Toate deciziile privind activitatea societății se iau cu majoritate simplă (cel puțin 51% voturi, care sînt proporționale cu numărul de acțiuni posedate). Această situație poate fi considerată ca un joc simplu de patru persoane, în care coalițiile cîștigătoare sînt

{2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2,3, 4}.

Să determinăm valoarea Shapley a acestui joc.

Pentru a determina să obsevăm că singura coaliție cîștigătoare T pentru care T — {1} nu este cîștigătoare este {1, 2, 3}. Deci, fiindcă $t = 3$,

$$<p_x = 2!\ l!/4! = 1/12.$$

Analog, coalițiile cîștigătoare, care își pierd această proprietate dacă jucătorul 2 este înlăturat, sînt {2, 4}, {1, 2, 3}, {2, 3, 4} deci, în același mod găsim $<p_3 = 1/4$ și $<p_4 = 5/12$. Astfel, valoarea Shapley este vectorul (1/12, 1/4, 1/4, 5/12). Este interesant că acesta nu concordă cu „vectorul voturilor” (1/10,1/5,3/10, 2/5). Să observăm de

exemplu că valoarea este aceeași pentru jucătorii 2 și 3, deși Dacă *iei,* se vede că există exact coaliții $ formate din s elemente astfel ca T C S. Prin urmare, avem

$$\text{YJT)} = \pounds\ (\sim ir'\ cr\text{-}Vs = S\ (-1)'\text{-}'\ C\ \boldsymbol{d.r} = \quad s = i \qquad \boldsymbol{s = t} \qquad -0$$

$$S\ ^{c}\text{«-}'\ \circledR^{s_1\ dj:} = \quad \text{-'o}\ \boldsymbol{s=t}$$

$$= C\ \text{«}^{!_1}\ S \qquad \boldsymbol{Cn\sim\text{-}i\ x^{s}\sim'} = C\ \hat{}^{n1}\ (1 - \text{”»})\text{"}\blacksquare\text{' d.r.}$$

$$\text{Jo}\ \boldsymbol{s=I} \qquad \boldsymbol{\text{-'<>}}$$

Aceasta este o integrală definită bine cunoscută, egală cu

$$\text{Yi(î')} = (t - 1)!\ (u - 1)\ !/\text{«}\blacksquare!$$

și deci

$$\text{îiW} \quad = \quad {}_{s}{}^{(}\text{<-}^{1)!}\ .\ \text{~~n Z)!~~} \quad [V(T)_ \quad v \quad (T\text{-}\{i\})].$$

(9.1.4)

$$\text{TCN} \quad n!$$
$$\text{i eT}$$

Formula (9.1.4) dă în mod explicit valoarea Shapley a unui joc *v.* Se verifică acum cu ușurință că această funcție satisface axiomele SI — S3. în plus, se poate observa că suma coeficienților 7 (*T)* este egală cu 1, deoarece numărătorul lui *^(T)* este egal cu numărul permutărilor lui *N,* în care *i* este precedat de elementele lui *T* și numai de acestea, iar numitorul este numărul total al permutărilor. Datorită superadităvității lui *v,* expresia din paranteză este cel puțin egală cu *v* ({z}). Prin urmare,

(9.1.

5) și deci 9 [r] este întotdeauna o imputație.

în afară de derivarea axiomatică de mai sus, valoarea Shepley definită de (9.1.4) se poate obține prin următoarea *motivare heuris- tică.*[**] Să presupunem că *n* jucători (elementele lui A) convin să se întîlnească într-un loc dat la un moment specificat, dar datorită unor fluctuații aleatoare sosesc în momente diferite; se presupune însă că toate ordinile de sosire posibile (permutările jucătorilor) au aceeași probabilitate, adică l/(n!). Să presupunem că un jucător *i* primește cîștigul *v (T) — v (T* — {i}), dacă înaintea sa au sosit Aceasta este însă exact dezvoltarea binomului (1 — 1)"~', deci este nulă pentru toți /<« și 1 pentru *t = u.* Pentru orice *JJcN* avem deci

$$\pounds\, c_s\, w_s\,(U) = v\,(U).$$
sov

Putem trece acum la demonstrarea teoremei 9.1.4. Conform lemei 9.1.7, orice joc se poate scrie ca o combinație liniară de jocuri w_s. Conform lemei 9.1.5, funcția 9 este definită în mod univoc pentru astfel de jocuri. O parte dintre coeficienții c_s sînt negativi; totuși, folosind axioma S3 se arată cu ușurință că, dacă *u, v* și *u—v* sînt jocuri, atunci 9 [w — w] = 9 [w] — 9 [®J. Deci, în baza axiomei S3, funcția 9 este unic determinată pentru orice joc *v.* Putem să dăm chiar forma exactă a funcției 9. Știm că

$$V = \underset{SCN}{c_s w_s}$$

și deci

$$[>] = \underset{saif}{X}\ \underset{»es}{\underset{SQN}{\pounds\, c_s \text{—•}}}$$

Substituind aici valoarea lui c_s dată de (9.1.1), obținem

** Vezi și p. 28. (.V.7'.)

$$w = s\ (\hat{i}/s)\ f\ s(-i)\text{-}\hat{}(T)i,$$

$$\underset{\text{ies}}{\overset{SC.N}{}}\ [\text{TcS}\ \underset{1}{}\ |$$

$$\underset{TU(»)CS}{\overset{£\quad ScN}{}}\ (-1)\text{-}'\ (1/8)\ V\ (T) \qquad (9.1.2$$

Să facem în (9.1.2) notația

$$Yi(2,)= \qquad \text{sil} \qquad \text{HI)'-'} \qquad — \qquad '$$

$$(9.1.3) \qquad \underset{Tu(»)cS}{} \qquad \underset{S}{}$$

Este ușor de văzut că, dacă $i\ t\ T'$ și $T = T'$ U atunci $y_4\ (T') = — y_4\ (T)$, deoarece toți termenii din membrul al doilea al egalității (9.1.3) sînt în ambele cazuri aceiași, exceptînd faptul că $t = t'$ 4- 1, și deci cele două sume au semne diferite. Avem, prin urmare,

$$= \underset{i\&T}{\overset{E\ TcN}{}}\ Y«\ (T)\ \{v\ (\text{T}) - v\ (T - \{\text{i}\})\}.$$

și, prin urmare, fiindcă egalitatea este valabilă și pentru S = T, avem [w_s] = 0 pentru i £ 8. Dacă permutarea ~ este astfel incit imaginea lui $ prin TZ este S, atunci evident TZW_S=W_S Prin urmare, conform cu S2, cp» [w_s] = <p, [w_s] pentru orice i, j e S. Fiindcă există s astfel de termeni și suma lor este egală cu 1, rezultă că <p_4 [w_s] = 1/s pentru i e S.

9.1.6. COROLAR. *Dacă* c>0, *atunci*

$$[cw_s] = \begin{cases} c/s, \text{ dacă } i \in S, \\ 0, \text{ dacă } i \notin S. \end{cases}$$

9.1.7. LEMĂ. *Pentru orice joc v există* 2^n — 1 *numere reale* c_s, *atașate coaliților 8cN, astfel ca*

$$® = \underset{Sc\text{-}V}{E} «s \ ™s,$$

unde w_s *este definit ca în Ierna* 9.1.5.

Demonstrație. Vom arăta că numerele c_s definite prin

$$c_s = \underset{\mathbf{TCS}}{£} (-l)'\text{-}^(T) \qquad (9.1.1)$$

(unde t este numărul elementelor din *T)* satisfac afirmația lemei. într-adevăr, pentru orice coaliție *U* avem

$$\mathbf{E}\ c_s w_s(U) = \mathbf{X}\ c_s = \mathbf{S}\ [■£ (-ir'Ț(T)1 =$$

SCN *sau sau* [res J

= S [S (-ir'p(n

rCU sau

LSDT J

Să considerăm acum expresiile din paranteză. Pentru orice valoare a lui *s,* între *t* și w, există *C^-i* (combinări de *u—t* elemente luate cîte *u—s)* mulțimi *8* cu s elemente, astfel ca *T* Q 8 C *U.* Expresia din paranteză se poate înlocui prin

9.1.3. AXIOME (SHAPLEY). Numim *valoare* a unui joc *v* un w-vector*' <p [®] cu proprietățile :

51. Pentru orice suport <8 al lui *v* avem

$$\mathbf{S}_{s} \qquad ® (S).$$

52. Pentru orice permutare *n* și orice *i e N,*

$$<?K(i) [îW] = <?i$$

53. Pentru orice jocuri *u* și *v* avem

$$<p [u + = <p [«] + ? [®].$$

Acestea sînt axiomele lui Shapley. Este remarcabil taptul că ele sînt suficiente pentru a determina o funcție-valoare q>, definită pentru toate jocurile.

9.1.4. TEOREMĂ. *Există o funcție unică* y, *definită pentru toate jocurile, care satisface axiomele* SI —S3.

Pentru demonstrația acestei teoreme sînt necesare următoarele leme.

9.1.5. LEMĂ. *Definim, pentru orice coaliție S, jocul* w_s *prin*

$$(T) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 8 \text{ (£ } T, \\ 1, \text{ dacă } 8 \text{ c } T. \end{cases}$$

Dacă s este numărul jucătorilor din 8, atunci

$$[W_S] = \begin{array}{l} 1/s, \text{ dacă } i \text{ e } S, \\ 0, \text{ dacă } i \text{ t } S. \end{array}$$

Demonstrație. Este evident că *8,* ca și orice mulțime *T* care include pe *8,* este un suport pentru jocul w_s. Folosind axioma SI, rezultă deci că

$$\mathbf{S}_{i\ G.T} \text{ E}^{w}\text{s}] = 1\text{» dacă } 8 \text{ C } T,$$

*> <pj [u] reprezintă partea care trebuie atribuită jucătorului *i* din cîștigul total *v (N). (N.T.)*

ALTE CONCEPTE DE SOLUȚIE PENTRU JOCURI DE *n* PERSOANE

9.1. VALOAREA SHAPLEY

Faptul că pînă în prezent nu a fost dată nici o teoremă generală de existență a mulțimilor stabile intr-un joc de *n* persoane a condus pe matematicieni la căutarea altor concepte de soluție. Un astfel de concept este *valoarea Shapley.*

Shapley introduce această valoare în mod axiomatic. Dăm mai întîi două definiții.

9.1.1. DEFINIȚIE. Se numește *suport* al unui joc *v* o coaliție *T* cu proprietatea că *v (8) = v (S* n *T)* pentru orice coaliție 8.

Intuitiv definiția înseamnă că orice jucător, care nu aparține unui suport al jocului, este lipsit de orice importanță, în sensul că nu poate să aducă nimic nici unei coaliții.

9.1.2. DEFINIȚIE. Fie® un joc de *n* persoane și fie TC O permutare arbitrară a mulțimii *N.* Prin 7t® înțelegem jocul *u* cu funcția caracteristică definită prin

$$« (\{TT (ij, 7t (i_2), ..., 7T (i,)\}) = v (S)$$

pentru orice coaliție 8 = {i_x, *i2) ...,* i,}.

Jocul *nv* constă deci din jocul *v* în care s-au interschimbat rolurile jucătorilor prin permutarea *iz.*

Cu aceste două definiții putem formula acum axiomele lui Shapley. Menționăm că, deoarece jocurile sînt în esență funcții cu valori reale, este posibil să vorbim despre suma a două sau mai multe jocuri, sau despre un multiplu real al unui joc.

O coaliție S este prin definiție cîștigătoare dacă și numai dacă conține o submulțime de forma

$$\mathbf{S' = U\ ^{S}i\ X\ W>}$$
ier

unde *T* este o coaliție cîștigătoare In *w* și fiecare *Sj* este coaliție cîștigătoare In *Vj.* (Heu- ristic aceasta sugerează o „descompunere" a jocului In *n* comitete x {j}.)

Pentru x^{j}e Vj și j/e IV, fie z un m-vector cu componentele Z;j = xj yj. Arătați că mulțimea tuturor acestor z este o mulțime stabilă a jocului simplu „compus" u.

7. Fie *v* un joc simplu cu o infinitate numărabilă de jucători, in care o mulțime de jucători formează o coaliție cîștigătoare dacă și numai dacă complementara sa este finită. Considerind că u este normalizat (0, 1), mulțimea *E* (o) constă din toate șirurile (ij, x_2, ...) de numere nenegative astfel ca S x_t = 1.

Jocul *v* nu are nici o mulțime stabilă. (Arătați că nici o imputație nu poate aparține unei mulțimi stabile).

8. Fie *v* jocul simplu de patru persoane, normalizat (0, 1), cu coalițiile cîștigătoare {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}. Fie C o submulțime Închisă arbitrară a intervalului [0, 1) și fie *J* mulțimea tuturor vectorilor de forma

$$x = (0, (1 - u)/2, (1 - u)/2, u),$$

unde ii e C. Atunci *v* posedă o mulțime stabilă *V* astfel ca *J* r~ *V,* și mulțimile *J* și *V—J* sînt Închise și disjuncte (și deci separate).

a) l-'ic p (u, *C)* = $\min_{ie0}$|u — *v* |. Fie *K* mulțimea tuturor imputațiilor de forma

$$([1 - u - p (u, C)]/2, x, y, u)$$

pentru toți u G [0, 1]. Arătați că mulțimea *Ii* este Închisă și *K* A *J* = 0.

b) Fie *II* mulțimea tuturor imputațiilor din *K,* care sint dominate de imputații din *J.* Atunci

$$V = J \cup (K - II)$$

este mulțimea stabilă căutată.

!>. Demonstrați teorema 8.5.1.

c) O parte pozitivă a multimii jocurilor normalizate (0, 1), den persoane, ele au o mulțime stabilă unică (teorema 8.4.7).

2. Numim *semiimputație* pentru un joc de n persoane *v* un n-vector *x* = *(*x_2, ..., x_n)

cu proprietățile *Xț^-v* ({*}) și *v (N).* Arătați că, pentru orice mulțime stabilă

V și orice semiimputație *x$V,* există o imputație *ye* V care domină pe *x.*

3. într-un joc *v* definim numerele b_t astfel:

$$bi = \max_{\text{scar-i»)} } [o\ (S\ U\ \{'\}) \sim {}^{v}\ (^{s})l-$$

Arătați că o imputație care nu satisface condiția *) *Xț* b_i nu aparține nucleului și nici unei mulțimi stabile.

4. Arătați că mulțimea stabilă simetrică V a jocului de trei persoane considerat în 8.4.5 este un caz particular de *soluție simplă principală* a unui joc simplu, definită mai jos.

Fie *v* un joc de n persoane cu sumă constantă, simplu, normalizat (0, 1). Să presupunem că există un vector *a* = (a!, ..., a_n) astfel ca a_4 0 și a_4 = 1 pentru orice coa-

•**es**

liție ciștigătoare minimală S. Pentru o astfel de coaliție fie *xS* vectorul definit prin *x$ = oti,* dacă ieS, și x* = 0 in caz contrar. Atunci x^s este o imputație și mulțimea

V = {xS | s este coaliție ciștigătoare minimală}

este o mulțime stabilă a jocului *v,* numită soluția simplă principală.

5. Se consideră jocul de *n* persoane simplu, normalizat (0, 1), în care coalițiile ciștigătoare sînt formate din : a) jucătorul 1 și cel puțin încă un alt jucător, sau b) mulțimea de jucători {2, 3, ...,n}.

a) Determinați soluția simplă principală a acestui joc.

b) Pentru S = {1, *jJ,* unde *j =ț=.* 1, fie Vj mulțimea tuturor imputațiilor pentru care Xj 4- *Xj* = 1; pentru S = {2, 3, ... , n} fie *Vg* mulțimea tuturor imputațiilor cu Xj = 0. Toate aceste mulțimi Vg sînt mulțimi stabile.

c) Fie S = {2, 3, ..., n}, 0 *c* 1, și fie V_g (c) mulțimea tuturor imputațiilor cu $x_1 = c$. Mulțimea V_g (c) este o mulțime stabilă dacă 0 *c* < *(n* — 2)/(n — 1), dar nu este stabilă pentru c>(n - 2)/(n - 1).

d) Pentru S = {1, *j},* mulțimea V« definită în b) este singura mulțime stabilă care discriminează toți membrii lui N — S.

6. *Compunerea jocurilor simple.* Fie i>$_x$, v_2, ..., v_n jocuri simple normalizate (0, 1), cu respectiv $m_2, m_2, . . ., m_„$ jucători, și fie *ui* un joc de *n* persoane normalizat (0, 1). Fie Vj, $V_2, ..., V_„$, IV mulțimi stabile respectiv în 14, $u_2, . .., v_n, u$>.

Se construiește un joc simplu *u* de *m* persoane (m = nij 4- ... 4- $m_„$) în modul următor : considerăm drept cei m jucători perechile ordonate (i, *j)* unde l^j^n și 1 *i* ^774

) Pentru cel puțin un indice *i. (N.T).*

Atunci în jocul [m, n], unde m = km' și n = kn', imputația

„ (0(1) V(I) V(I) |

Im 4- *n m + n. m + nj*

aparține nucleului. în plus, pentru orice E>0 *există k* (e), *astfel încît în orice joc [km[1], kn'] cu* Ă: *> k(e) nici o imputație care are o componentă mai mică decît* †† ## £ *nu aparține nucleului.*

m + n

Trecem peste demonstrația acestei teoreme care este absolut similară cu aceea a teoremei 8.5.3. Ecuația (8.5.10) arată că raportul numărului de jucători ai mulțimilor *M* și *N* este un „raport optim" (de exemplu, cazul cînd volumul de capital disponibil este exact cel necesar pentru folosirea integrală a forței de muncă). Dacă raportul celor două mulțimi este altul, atunci există o neconcordanță (folosirea incompletă a forței de muncă sau suprasolicitarea ei) și, dacă jocul este suficient de mare, nucleul este vid. Pe de altă parte, dacă (8.5.10) este verificată, există totdeauna un nucleu nevid, care la limită degenerează într-o singură imputație *x,* și jocul nostru poate să crească în mod prosper și fericire generală.

PROBLEME

1. a) Nucleul unui joc *v* de n persoane este o submulțime a oricărei mulțimi stabile, b) Dacă nucleul este unica mulțime stabilă a jocului *v,*

---

††*> Implicația inversă nu este adevărată, după cum arată următorul exemplu, dat de T.E. Kulakovskaia (in articolul *Dostatocinte usloviia suscestvovaniia iadra reteniia.* Lit. Mat. Sb., Voi. 9, No. 2, 1969); nucleul jocului de patru persoane cu funcția caracteristică *v* dată de

‡‡ *(S)* = $^2/_3$, dacă | S| =3,

■ P({1, 2, 3, 4}) = 1,

o(S) = 0 în celelalte cazuri

este acoperirea convexă a punctelor

(1/3, 1/3, 1/3, 0), (1/3, 1/3, 0, 1/3), (1/3, 0, 1/3, 1/3), (0, 1/3, 1/3, 1/3)

și deci intersectează toate liiperplancle = 0 (i = 1, 2, 3, 4). Se arată însă cu ușurință că acest nucleu nu este o mulțime stabilă. (jV. *T.)*

atunci intersecția sa cu orice față x_t — v ({i}) a simplexului imputațiilor este nevidă *>.

i e Jf rezultă < y,- pentru toți *j* e *N.* Prin urmare, *x* nu poate domina pe *y.*

Să presupunem acum că *xțV.* Există o pereche *(i, j)* cu *i e M, j* G -V, astfel ca x_{ℓ} + *x,* < 2<|<(a/2, 6/2). Alegem (s_n s_2) astfel ca >x_f și z_2 > *Xj.* Atunci imputația *y* G *V* reprezentată de vectorul ($\hat{a}_n$ z_2) domină *x* prin {i, j}. *V* este deci extern stabilă.

Conținutul teoremei arată că mulțimile stabile nu au nici o tendință de a „degenera" cînd *n* crește. O astfel de tendință are totuși nucleul jocului. Considerăm două cazuri: cazul *monopolist* (jocul [1, n]) și jocul de *pură competiție* (jocul *[m, n],* unde *m și n* sînt ambele mari).

8.5.3. TEOREMĂ. *În jocul* [1, n] *imputația x cu* x_j = (0, *b) pentru toți j* e *N aparține nucleului. în plus, pentru orice i* >0 *există n(* E) *astfel ca, pentru n> n(* e), *nici o imputație y cu* y_r< x_t — e *nu a- parține nucleului.*

Demonstrație. Dominarea este posibilă numai prin o mulțime £ cu le $. Deoarece x_1 are valoarea maximă posibilă, rezultă că *X* G *C (v).*

Să considerăm acum expresia *v (I) — v (I — {}) —* (0, 6),
unde *j&N.* înlocuind *v* conform cu (8.5.6) și aplicînd teorema lui Taylor, rezultă că pentru orice e > 0 există *n (* E) astfel încît

$$\text{I } v\,(I) — \quad \sim \{j\}) — + (0, 6) \mid < s/n$$

pentru orice n > *n* (s). Să presupunem acum că *y* este o imputație pentru jocul [1, *nJ* astfel ca 3/1 < a?i — e. Atunci trebuie să existe un *j* e JV, astfel ca *yj* > (°> &) + £/n (deoarece trebuie să avem =
= $x_{\pm}$ + (0, *b)).* Atunci

$$£\ Vi < \text{v (I) -} \quad (0, b) — \text{e/n} < v\,(I — \{j\})$$

și deci *y C* (0).

Teorema 8.5.3 descrie ce se întîmplă în cazul monopolist. Pentru cazul pur competitiv avem :

8.5.4. TEOREMĂ. *Fie m' și n' astfel ca*

$$m'a \quad n'b \mid m' \qquad \max_{\boldsymbol{\beta}} \psi\left(\frac{s_m a}{s} \quad \frac{s_n b}{s}\right) \qquad (8.5.1$$
$$m' + \quad + n' J$$

unde maximul se ia după toți x și y astfel ca

$$\hat{} \blacksquare > 0,\ y._c > 0,\ £\ x_k = \quad £\ a_t,\ \%y_k = \mathrm{S}\ b\hat{}$$
$$\underset{kes}{} \qquad \text{iesri-ii ies} \qquad \underset{ies()N}{}$$

Vom simplifica situația, presupunînd că toți jucătorii au aceeași funcție de utilitate, adică *y)* = tț *(x, y)* pentru toți *i.* Atunci, datorită strictei convexități a lui distribuția optimă de bunuri se obține prin împărțirea acestora în mod egal. Presupunem de asemenea că fiecare membru din *M* posedă aceeași cantitate *a* din primul bun, iar fiecare membru din *N* posedă aceeași cantitate *b* din bunul al doilea. Funcția caracteristică este dată prin

$$v(S) = \mathrm{S}<]\hat{\mathrm{I}}\ (s_{„}, a/s, s_n\ b/s), \qquad (8.5.6)$$

unde s, s_m, $s_{„}$ reprezintă respectiv numărul elementelor din *S, Sn HI* și $ n *N.* Vom nota prin [MI, *n]* un astfel de joc, în care *HI* are *m* elemente și *N* are *n* elemente.

Pentru jocul de două persoane [1, 1] funcția caracteristică este

$$® (\{!\}) = +(«, 0),\ v\,(\{2\}) = \qquad (0,6),$$

$$\mathrm{M}(\{1, 2\}) = 2ț\ (a/2, b/2).$$

Acest joc are o mulțime stabilă unică, care coincide cu mulțimea tuturor imputațiilor, adică a tuturor vectorilor de forma (z_n z_2), unde

$$z_k + z_2 = 2<]\hat{\mathrm{I}}\ (\mathrm{a}/2, b/2), \qquad (8.5.7)$$

$$z_{\pm}> <]> (a, 0), \qquad (8.5.8)$$

$$z_2> (0, b). \qquad (8.5.9)$$

Vom arăta acum că, pentru orice *n,* jocul [M, ÎI] posedă o mulțime stabilă analoagă celei date de (8.5.7) — (8.5.9).

8,5.2. TEOREMĂ. *Pentru orice n, jocul* [n, îi] *posedă o mulțime stabilă V, constând din toți vectorii x cu* $x_{(} = z_r$ *pentru toți i* e *HI și Xj* = z_2 *pentru toți jeN. unde* (z_k, z_2) *satisface condițiile* (8.5.7) — - (8.5.9).

Demonstrație. Arătăm mai întîi că *V* este intern stabilă. într- adevăr, dominarea poate să aibă loc numai prin o mulțime *S,* astfel ca *S n HÎ 0* și *S n N =£0.* Dacă *x,yeV,* din $x_t > y_{\ell}$ pentru un

va „degenera” într-un singur punct limită. Acesta este „prețul pieței”. Dăm mai jos tratarea matematică.

Să considerăm o piață economică compusă dintr-o mulțime *1 = M* u *N* de persoane, între care se fac schimburi (comerț). Membrii *i* din *M* au inițial colecțiile de bunuri *(a_{if}* 0), iar membrii *j* din *N* au

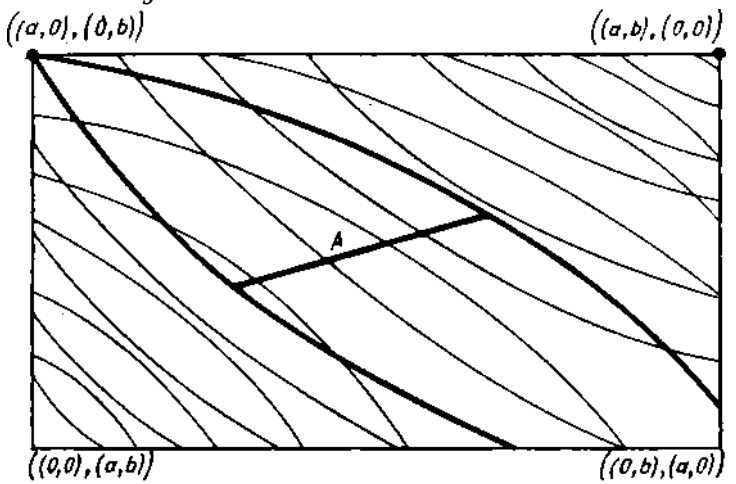


Fig. 8.5.

inițial colecțiile (0, b_s). Fiecare jucător *i* are o funcție de utilitate *(x, y).* Presupunem că :

fiecare funcție este strict convexă ; (8.5.1)

lim *(x, y)* < oo pentru orice *y ;* (8.5.2)

lim *(x, y)* < oo pentru orice *x;* (8.5.3)

funcțiile (j'i au derivate parțiale de ordinul al doilea continue peste tot. (8.5.4)

Să presupunem, că se formează coaliția $. Membrii lui S vor împărți colecția lor comună de bunuri, astfel încît să maximizeze utilitatea lor totală și apoi vor face eventual plăți laterale. Avem astfel

$$v(S) = \max J \pounds <h(\hat{}, y_k) 1, \qquad (8.5.5$$

X.v)

8*4.9. TEOREMĂ. *Mulțimea jocurilor de n persoane, care posedă mulțimi stabile care discriminează n—2 jucători, are măsură pozitivă, în aceste mulțimi stabile cel puțin n—*3 *dintre jucătorii discriminați sînt excluși.*

8.5. MODELUL LUI EDGEWORTH AL PIEȚEI. UN EXEMPLU

Ne-am ocupat în întreg acest capitol de cîteva concepte strict matematice. Vom aplica acum cîteva dintre acestea în analiza economică.

Să considerăm următorul tip de joc de două persoane cu sumă nenulă : jucătorul I posedă *a* unități dintr-un bun, iar jucătorul II posedă *b* unități dintr-un alt bun. Nici unul nu posedă vreo cantitate din bunul posedat de celălalt. Cu alte cuvinte, jucătorul I are colecția de bunuri (a, 0), iar II are colecția (0, *b).* Jucătorii urmează să facă un schimb de bunuri, ideea fiind că ambii pot cîștiga o anumită utilitate prin înlocuirea bunurilor lor cu colecțiile *(x,y)* și respectiv *(a — x, b — y),* unde 0<o;<și0<7/<6.

Astfel de jocuri au fost considerate inițial de Edgeworth, care **a** dat o „soluție" absolut analoagă mulțimilor stabile ale lui von Neumann și Morgenstern. Această soluție este o mulțime *A* de distribuții (perechi de colecții de bunuri), astfel ca nici o distribuție din *A* nu este preferată de ambii jucători față de o altă distribuție din *A,* dar pentru orice distribuție *((x, y)-, (a—x,b—y))* care nu este în A există o distribuție ((&', *y'); (a—x', b—y'))* din A, care este preferată de ambii jucători în raport cu prima. în sfîrșit, pentru orice distribuție din *A* ambii jucători au utilități cel puțin egale cu cele corespunzătoare distribuției „inițiale" *{(a,* 0), (0, *b)).* Presupunînd divizibilitatea infinită a bunurilor considerate, mulțimea *A* formează de obicei o curbă, numită *curba contractelor.* Această curbă este reprezentată grafic în fig. 8.5 prin intermediul unui sistem de *curbe de indiferență.* Curbele concave reprezintă curbele de nivel ale funcției de utilitate (curbele de utilitate constantă) ale jucătorului I; curbele convexe sînt curbele de utilitate constantă ale jucătorului II. Curba contractelor este atunci mulțimea

punctelor de tangență a două curbe, aparținînd respectiv celor două familii, restrînsă la domeniul în care utilitățile ambilor jucători sînt cel puțin egale cu utilitățile corespunzătoare distribuției inițiale.

în analiza sa Edgeworth conclude, că dacă numărul jucătorilor crește, atunci — în anumite condiții rezonabile — curba contractelor

z este dominat de imputația

$$(\alpha_2 + e,\ \%2 + f)\ z\ 3 + e)$$

prin coaliția {2, 3}.

Dacă imputația *z* are o componentă sau nici una cel puțin egală cu $v_2 f2$, putem presupune că z_x și z_2 sînt ambele mai mici ca $v_2 | 2$. Atunci *z* este dominat de imputația

$$(v_2/2,\ T_2/2,\ 1 - \mathbb{R}_2)$$

prin coaliția {1, 2}.

Analiza de mai sus își pierde validitatea pentru $\mathbb{R}_2 < 2/3$. De fapt, stabilitatea internă se păstrează, dar se pierde stabilitatea externă. Astfel de jocuri posedă un nucleu, constînd din toate imputațiile y — (3/i, 3/2, Z/s), care satisfac condițiile $y_i < 1 — v_2$ pentru i = 1, 2, 3. Se poate verifica că reuniunea nucleului cu cele trei segmente din (8.4.1) este o mulțime stabilă (vezi fig. 8.3). Pentru $v_2 < 1/2$, în plus cele trei segmente sînt submulțimi ale nucleului; în acest caz nucleul este deci unica mulțime stabilă (vezi fig. 8.4).

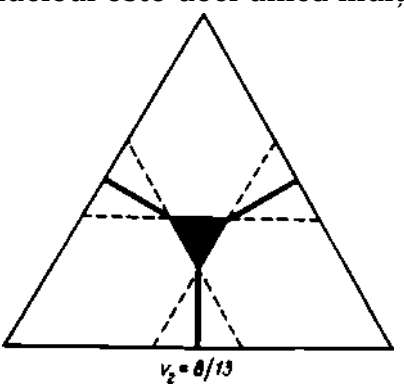


Fig.

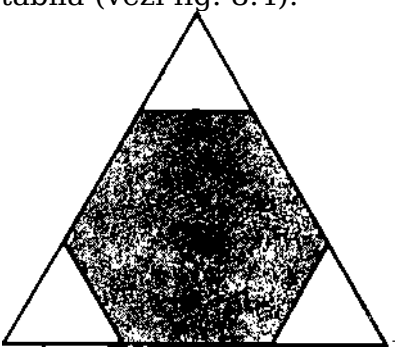


Fig.

După cum am văzut, mulțimea tuturor jocurilor (normalizate) de *n* persoane formează o submulțime compactă a spațiului euclidian $(2^n — n — 2)$-dimensional. Orice submulțime a acesteia cu măsură Lebesgue pozitivă este numită *parte pozitivă* a mulțimii jocurilor de *n* persoane. Dăm fără demonstrație următoarele teoreme :

8.4.8. TEOREMĂ *Mulțimea jocurilor de n persoane care posedă o mulțime stabilă unică, și anume nucleul, are*

măsură pozitivă.

segment

$$(x,\ x,\ 1 - 2x)$$
$$(x,\ 1 - 2x,\ x)\quad v_2/2 < x < \blacksquare\ '(1 - 2x,\ x,\ x) \qquad (8.4.1$$

(vezi fig. 8.2). Se poate verifica că această mulțime este stabilă dacă $v_2 > 2/3$.

Stabilitatea internă se demonstrează astfel /deoarece $x > v_2/2$ avem $2x > v_2$ și deci o imputație de forma $(x, x, 1 - 2x)$ poate fi dominată numai prin una din coalițiile {1, 3} sau {2, 3}. Dar nici una dintre im- putațiile din (8.4.1) nu poate domina $(x,x,1-2x)$ prin {1, 3}, deoarece pentru oimputație $(y,y,1-2y)$, din $y' > x$rezultă $1 - 2y < 1 - 2x$, iar pentru o imputație$(y, 1-2y,y)$, dacă $y > x$, rezultă $2y > v_2$, adică nu este verificată condiția 2) din definiția 8.3.1. Simetria și considerații similare completează demonstrația stabilității interne. Stabilitatea externă este de asemenea ușor de demonstrat. Deoarece $v_2 > 2/3$, orice imputație are cel mult două componente cel puțin egale cu $v_2/2$, exceptînd cazul cînd $v_2 = 2/3$ și imputația este (1/3, 1/3, 1/3), care satisface (8.4.1). Astfel, orice imputație care nu satisface (8.4.1) are cel mult două componente mai mari sau egale cu $v_2/2$. Să presupunem că o imputație z are două astfel de componente; din cauza simetriei putem presupune că acestea sînt primele două componente, z_x și z_2. Dacă $z_t = z_2$, atunci z satisface (8.4.1). Dacă z_x / z_2, putem presupune (în baza simetriei) că $z_t = z_2 + 3s$, unde e>0. Atunci

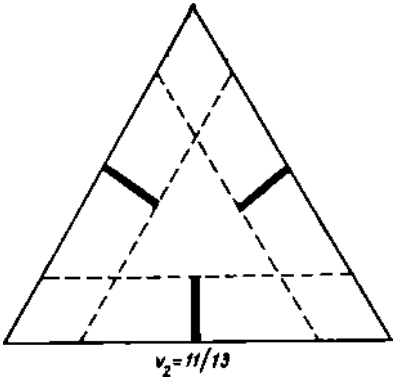


Fig.

8.4.6. TEOREMĂ. *Fie v un joc simplu, normalizat* (0, 1), *și fie S o coaliție cîștigătoare minimală (adică o coaliție cu proprietatea că v(S) = 1, dar v(T) =0 pentru orice T cS, T =ț= 8). Fie* F_s *mulțimea tuturor imputațiilor x cu* = 0 *pentru orice i $ S. Atunci* F_s *este o mulțime stabilă.*

Demonstrația este asemănătoare cu demonstrația faptului că mulțimea V_{3c} este stabilă (vezi exemplul 8.4.5).

Teorema 8.4.6 stabilește deci că orice joc simplu posedă mulțimi stabile discriminatoiii, în care o coaliție cîștigătoare minimală *exclude* pe toți ceilalți jucători. în anumite cazuri este posibil ca unii dintre jucătorii discriminați să primească cîștiguii mici (vezi exemplul 8.4.5). Valorile exacte pe care le pot primi aceștia sînt în general foarte greu de determinat; nu vom încerca să tratăm această problemă aici.

8.4.7. Exemplu. *(Soluții simetrice pentru jocuri de trei persoane)* în exemplul 8.4.5 am dat toate soluțiile (mulțimile stabile) ale unui joc de trei persoane cu sumă constantă. Acest joc posedă o mulțime stabilă simetrică (formată din trei puncte). Vom vedea acum că și alte jocuri simetrice de trei persoane (cu sumă generală) posedă o mulțime stabilă simetrică. într-un joc de trei persoane normalizat (0,1) valorile coaliților formate din una sau trei persoane sînt cunoscute; rămîn de fixat numai valorile coaliților de două persoane, într-un joc simetric aceste ultime valori sînt toate egale, deci jocul este determinat de un parametru unic v_2. Acest parametru poate lua orice valoare din intervalul [0,1]; pentru y_2=l se obține jocul cu sumă constantă (analizat mai sus), iar pentru v_2 = 0 se obține un „joc pur de negociere", în care fiecare imputație aparține nucleului și deci nucleul este singura mulțime stabilă.

Dacă v_2 este mare (adică apropiat de 1), este de așteptat ca jucătorii să se comporte asemănător ca în jocul de două persoane. Ei vor încerca deci mai întîi să intre într-o coaliție de doi jucători. Pentru că negociază unul împotriva altuia, ei nu pot cere prea mult de la partenerul prezumtiv și rezultatul „firesc" poate fi un acord—între membrii indiferent cărei coaliții se formează — de a împărți cîștigul în mod egal.

Odată o coaliție de doi jucători foi mată, ea va negocia cu al treilea jucător pentru împărțirea restului de 1—v_2 unități.

în acest caz nu există alternative; nu există nici un alt jucător cu care să se poată negocia, și astfel valoarea primită de coaliție depinde exclusiv de abilitatea de negociere a celor trei jucători. Este de așteptat deci să existe o mulțime stabilă constînd din punctele următoarelor trei

Datorită simetriei jocului este evident că vor exista de asemenea familiile de mulțimi stabile 7_{1e} și $V_{2\text{-}c}$, în care este discriminat jucătorul 2 și respectiv 3.

Exemplul precedent arată că un joc poate poseda un număr foarte mare de mulțimi stabile. Nu este totuși clar în ce mod trebuie să fie

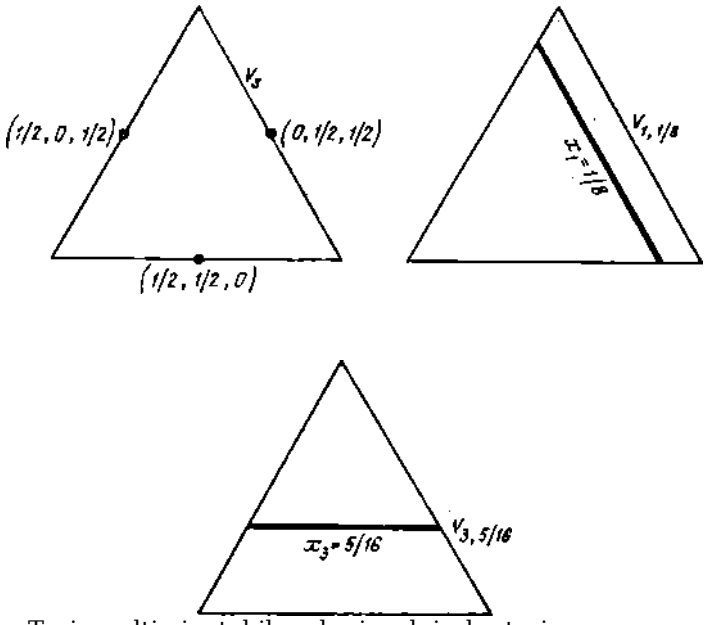


Fig. 8.1. Trei mulțimi stabile ale jocului de trei persoane cu sumă constantă,

aleasă una dintre aceste mulțimi. în plus, nu este clar în ce mod, odată aleasă această mulțime, trebuie selecționată o imputație din această mulțime stabilă. Von Neumann și Morgenstern consideră că mulțimile stabile reflectă normele de comportare proprii unei structuri sociale date. Odată ce societatea a decis asupra normelor de comportare (mulțimea stabilă), imputația este determinată de abilitatea de negociere a jucătorilor.

Am menționat faptul că pînă în prezent nu a fost dată nici o demonstrație pentru existența mulțimilor stabile în jocuri generale. Au fost totuși obținute rezultate parțiale. Unele dintre acestea demonstrează existența mulțimilor stabile pentru anumite clase de jocuri, altele studiază existența

unor anumite tipuri de mulțimi stabile. Să considerăm în continuare cîteva asemenea rezultate.

Una dintre principalele dificultăți este aceea că definiția unei mulțimi stabile nu garantează nici existența, nici unicitatea sa. De fapt, nici o demonstrație generală a existenței mulțimilor stabile nu a fost dată pînă în prezent. Pe de altă parte, nu a putut fi construit nici un joc den persoane care să nu posede o mulțime stabilă[§§]; majoritatea jocurilor posedă extrem de multe mulțimi stabile (dar există cîteva care au o mulțime stabilă unică).

8.4.5. Exemplu. Să considerăm încă o dată jocul de trei persoane cu sumă nulă normalizat (0,1). După cum am arătat mai sus, mulțimea

$$v = \{e/s, {}^{x}/_{2}, 0), ({}^{x}/_{2}, 0, V_2), (0, {}^{x}/_{2}, {}^{x}/_{2})\}$$

este stabilă. Aceasta nu este însă singura mulțime stabilă; dacă c este un număr arbitrar din intervalul [0, 1/2), este ușor de verificat că mulțimea

$$V_a.c = \{(a?_{x}, 1 — c — x_v\ c) \mid 0 < x_{\pm} < 1 — c\},$$

în care jucătorul 3 primește cîștigul constant c, în timp ce jucătorii 1 și 2 împart partea rămasă în toate modurile posibile, este de asemenea stabilă. Stabilitatea internă rezultă din faptul că două astfel de imputații, x și y, diferă numai prin aceea că, de exemplu $x_t > y_x$ și $tr_2 < y_2$. Dominarea unei imputații nu este însă posibilă prin coaliții formate dintr-un singur jucător.

Pentru a arăta că $V_{3,c}$ este extern stabilă, fie y o imputație arbitrară care nu aparține lui $V_{3.c}$. Atunci fie $y_3 > c$, fie $y_3 < c$. în cazul $y_3 > c$, să zicem $y_3 = c + e$ cu $e > 0$, definind x prin

$$+ e/2, \quad = y_2 + e/2, \ x_3 = c,$$

se arată cu ușurință că x e V_3.o și că x domină y prin {1, 2}.

în cazul $y_3 < c$ avem fie $y_1 < l/2$, fie $y_2 < l/2$ (în caz contrar suma lor ar depăși 1). Dacă ^<1/2, definim $x = (1—c, 0, c)$. Evident $1—c > Il2 > y_1$ și deci x domină pe y prin {1,3}; în plus evident $x\ e\ V_{3,c}$, în cazul $y_2 < l/2$ se arată similar că y este dominată de imputația $z = (0, 1 — c, c) e\ V_{3,c}$.

Prin urmare, în afară de mulțimea stabilă simetrică V

§§ Un joc de zece persoane fără mulțimi stabile a fost construit recent. Vezi Lucas* AV.F. *A Game with no Solution.* RAND Memorandum RM —5518 —PR, The RÂND Cor- poration, octombrie 1967.

acest joc are o familie de soluții, în care jucătorul 3 primește respectiv cîștigul fix c, unde *c* e [0,1/2). Aceste mulțimi stabile sînt numite mulțimi *discriminatorii*; spunem că jucătorul 3 este *discriminat.* în cazul mulțimii $P_{3\text{-}0}$ spunem că jucătorul 3 este *total discriminat* sau *exclus.*

Pentru acest joc normalizat (0, 1) obținem ca „soluție" mulțimea formată din următoarele trei imputații:

$$a12 = (1/2,\ 1/2,\ 0)>$$

$$a13 = (1/2,\ 0»$$

$$a23 = (0,\ 1/2)-$$

Să lămurim acum în ce sens poate fi aceasta considerată ca soluție. Este ușor de văzut că nici una dintre aceste trei imputații nu domină pe alta. (Dominarea a fost motivul care ne-a determinat să nu permitem cele trei imputații ușor modificate în varianta următoare a jocului.) De fapt, orice mulțime care constă dintr-o singură imputație are această proprietate. Jocul are însă proprietatea că *orice imputație a sa, diferită de cele trei de mai înainte, este dominată de una dintre aceste trei imputații.*

Pentru a arăta aceasta, fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ o imputație arbitrară a acestui joc. Intrucît jocul este normalizat (0, 1), avem $x_i >$ Oși + a?$_3$ = 1. Prin urmare, cel mult două componente pot fi cel puțin egale cu 1/2; în acest caz ambele componente sînt 1/2 iar a treia este nulă, adică *x* este una dintre cele trei imputații a_{i3}-.

în orice altă imputație *x* există cel mult o componentă cel puțin egală cu 1/2. Adică cel puțin două componente, să zicem x_ℓ și *x,* cu *i<j,* sînt mai mici ca 1/2. în acest caz, evident *x* este dominată de a_{I3} prin mulțimea *{i, j}.*

Acest exemplu ne conduce la definirea unui concept de soluție.

8.4.4. DEFINIȚIE. O mulțime *V* C se numește *mulțime stabilă* pentru jocul *v* dacă :

1) dacă *x, y* e *V,* atunci *x > y ;*

2) dacă *x$ V,* atunci există *y* e *V* astfel ca *y > x.*

Cele două proprietăți se numesc *stabilitate internă* (nici o

imputație din V nu domină o altă imputație din V) și respectiv *stabilitate externă* (orice imputație din afara mulțimii V este dominată de o imputație din 7).

Mulțimile stabile au fost introduse de von Neumann și Morgenstern și sînt uneori numite *soluții* ale jocului. Nu folosim această denumire, deoarece am folosit pînă acum acest termen pentru alte concepte de soluție.

Teorema 8.4.2 arată că C(v) este o mulțime convexă închisă (deoarece este caracterizată printr-un sistem de inegalități liniare). Aceasta este extrem de interesant, deoarece teoria economică clasică consideră nucleul ca „soluție" în majoritatea problemelor teoretice de jocuri. Orice imputație din nucleu este *stabilă,* în sensul că nu există nici o coaliție care să aibă atît dorința, cît și puterea de a modifica rezultatul jocului.

în general nucleul poate avea mai multe puncte. Acesta nu este un handicap, ci înseamnă pur și simplu că există mai multe rezultate stabile. Dificultatea principală constă în aceea, că nucleul nu există întotdeauna (adică poate fi vid).

8.4.3. TEOREMĂ. *Nucleul oricărui joc esențial cu sumă constantă este vid.*

Demonstrație. Fie *x* e *C(v).* Pentru orice *i* e *N* avem

$$\text{X } x_s > v_t N\text{-}\{i\}) \text{ ien} — \{<\}$$

și fiindcă jocul este cu sumă constantă, avem

$$v\ (N—\{i\}) = v(N) — v(\{i\}).$$

Adunînd aceste *n* inegalități și folosind faptul că jocul *v* este esențial, rezultă deci

$$\text{S}$$
$$i\text{ĕ}N$$

adică *x$ E(v).* Contradicția arată că nucleul *C(v)* este vid.

Deoarece nucleul este adeseori vid, este necesar să căutăm un alt concept de soluție. Un astfel de concept este cel de *mulțime stabilă.* Dăm mai întîi o justificare heuristică pentru acest concept***.

Să reluăm exemplul jocului de trei persoane din § 8.2. Funcția sa caracteristică este

$$v(S) = \begin{cases} —2, \text{ dacă S are un jucător,} \\ 2, \text{ dacă >8 are doi jucători,} \\ 0, \text{ dacă £ are trei jucători.} \end{cases}$$

Putem aduce acest joc la forma normalizată (0, 1), punînd *r* = 1/6, ªi = ª2 = ª3 — 1/6. Forma normalizată (0,1) este jocul simplu, în care coalițiile de două sau trei persoane cîștigă și jucătorii necoalizați pierd.

*** Vezi și pp. 26-27. (Ă'.T.)

8.4.2. TEOREMĂ. *Nucleul unui joc v este mulțimea tuturor n-vectorilor x, care satisfac condițiile*

a) E > «>($) pentru orice *SQN,* ***ies***

b) X = *v(N). ieN*

Demonstrație. Să presupunem că *x* satisface condițiile a) și b). Pentru *S* = {i} condiția a) se reduce la r({i}) care, împreună cu b), arată că *x* este o imputație. Să presupunem acum că *x* este dominată de o imputație *y,* adică există £ astfel ca i/, > x_t pentru orice *ie S.* împreună cu a) aceasta dă

$$\underset{ies}{\mathrm{E}}\ Vi > v\ (8),$$

care contrazice condiția 2) din definiția 8.3.1 a faptului că *y* domină *x.* Contradicția arată că *x* nu este dominată de nici o imputație, adică *xeC(v).*

Invers, să presupunem acum că *y* nu satisface condițiile a) și b)- Dacă nu satisface b), atunci nu este o imputație și deci nu aparține lui *C(v).* Să presupunem acum că *y* nu verifică a), adică există o mulțime nevidă *SCN* astfel încît

$$\underset{ies}{\mathrm{S}}\ Vi = v(S) - e,$$

unde e > 0. Fie

$$a = v(N) — v(S) - £\ \underset{ieN-S}{V}\ (\{/\}).$$

Folosind super-aditivitatea funcției *v,* rezultă a>0. Fie s numărul elementelor din >8 și fie *z* vectorul definit astfel:

$$\begin{array}{ll} y + \mathrm{E/S},\ v(\{i\}) & \text{dacă ie } 8, \\ + a/(n-s), & \text{dacă } i\$S. \end{array}$$

Este ușor de văzut că *z* este o imputație și că *z* > $_s$*y.* Prin urmare, *yt C(v).*

Aceste patru condiții determină o mulțime convexă (2^B — *n*—2)- dimensională. Dacă jocul este cu sumă constantă, sînt verificate în plus următoarele 2"-1—1 condiții:

v(N—S) = v(N) — v(S) pentru orice <Sc *N.* (8.3.5)

Mulțimea jocurilor cu sumă constantă are deci dimensiunea 2"-1—n—1, adică egală cu aceea a mulțimii jocurilor den—1 persoane. De fapt cele două mulțimi sînt congruente.

într-adevăr, dacă *u* este un joc de *n—1* persoane normalizat (0,1), el poate fi transformat într-un joc *v* de *n* persoane cu sumă constantă, introducînd un jucător *n* și definind

v(8) = u(8), pentru «e *8,*

v(S) = 1 — *u(N—8),* pentru *ne 8.*

Se verifică cu ușurință că acest joc este cu sumă constantă.

Următoarele două tipuri particulare de jocuri prezintă un interes deosebit.

8.3.7. DEFINIȚIE. Un joc *v* se numește *simetric,* dacă *v(S)* depinde numai de numărul elementelor din $.

8.3.8. DEFINIȚIE. Un joc *v* normalizat (0,1) se numește *simplu,* dacă pentru orice £ CJ avem fie *v{8)* = 0, fie *v(S)* = 1. Un joc se numește *simplu,* dacă forma sa normalizată (0,1) este un joc simplu.

Cu alte cuvinte, un joc este simplu, dacă pentru orice coaliție există numai două posibilități: cîștig (valoarea 1) sau pierdere (valoarea 0). Prin aceasta jocurile simple se pot aplica în științele politice, deoarece includ „jocuri" de votare, în alegeri și legislatură.

8.4. NUCLEU. MULȚIMI STABILE

Să trecem acum la analiza jocurilor pe baza relației de dominare. O primă idee este de a studia imputațiile

nedominate.

8.4.1. DEFINIȚIE. Mulțimea tuturor imputațiilor nedominate ale unui joc v se numește *nucleul jocului* (și se notează C(®)).

8.3.4. TEOREMĂ. *Orice jocuri echivalente sînt izomorfe.*

Demonstrație. Fie *u* și *v* jocuri echivalente. Să considerăm funcția definită pe *E(u)*

$$f(x) = rx + a, \text{ unde } r \text{ și } a = (a_x, \ldots, a_n)$$

sînt cele din definiția 8.3.3. Este ușor de verificat că, dacă *x eE(u),* atunci *f(x)* G *E(v).* în plus, dacă *x* >- *ₛy,* este clar că *f(x)* >- *ₛf(y).* Deci *f* este izomorfismul căutat.

Echivalența este deci suficientă pentru izomorfism. (Afirmația inversă este de asemenea adevărată, dar demonstrația este destul de complicată și nu va fi dată aici; vezi [8.5.].)

Este evident că echivalența este într-adevăr o relație de echivalență. Este interesant să alegem din fiecare clasă de echivalență un anumit joc particular.

8.3.5. DEFINIȚIE. Spunem că un joc *v* este *normalizat* (0,1), dacă

1) v({i}) = 0 pentru orice ie *N,*
2) *v(N)* = 1.

8.3.6. TEOREMĂ. *Orice joc esențial u este echivalent cu un singur joc normalizat* (0, 1)*'.

Demonstrația este simplă și nu o dăm aici. Teorema afirmă că din fiecare clasă de jocuri echivalente putem alege ca reprezentant un joc normalizat (0, 1). Avantajul alegerii unui astfel de joc constă în aceea, că în aceste jocuri valoarea *v(S)* a unei coaliții ne dă direct tăria sa (adică cîștigul suplimentar total obținut de membrii ei prin coalizare) și că toate imputațiile sale sînt vectori de probabilitate.

în literatura jocurilor de *n* persoane sînt folosite și alte tipuri de normalizare, de exemplu normalizarea (—1,0), definită prin condițiile v({i}) = —1 și *v(N)* = 0. Vom considera aici numai normalizări (0,1). Pentru că ne ocupăm de jocuri esențiale, aceasta nu implică nici o pierdere a generalității.

Mulțimea jocurilor de *n* persoane normalizate (0, 1) este astfel ca

$$\mathbf{i>(0) =} \ 0, \tag{8.3.1}$$

$$\text{r([i})= 0 \text{ pentru toți jeĂ}, \tag{8.3.2}$$

$$v(N) = 1, \tag{8.3.3}$$

$$\text{Ț(S(J } T) > v(S) + v(T), \text{ dacăSOT} = \mathbf{0}. \tag{8.3.4}$$

mulțimea tuturor funcțiilor cu valori reale *v,* definite pe submulțimile lui V,

*' Anume cu jocul cu funcția caracteristică i'(S) = *rn(S) +* ai unde *ies*

$$r = \text{l/[u(N) - £ } \overset{n}{\underset{\mathbf{i = l}}{\text{u}}}\text{(\{f\})] > 0 și a, = - ru(\{r\}). (X.T.).}$$

8.3.1. DEFINIȚIE. Fie *x* și *y* două imputații și fie >8 o coaliție. Spunem că *x domină y prin S* (și notăm *x >- $_S$y),* dacă

1) $x_t > y_t$ pentru orice *i* e *S,*

2) $\underset{i \wedge s}{\mathbf{E}} < v(S\}.$

Spunem că *x domină y* (și notăm *x >- y),* dacă există o coaliție £ astfel ca *x > $_S$y.*

Condiția 1) arată că fiecare membru din <S preferă pe *x* față de *y ;* condiția 2) arată că ei sînt capabili să obțină cel puțin valoarea oferită de imputația *x.*

Este ușor de văzut că, pentru orice $ dat, relația >- $_s$ este o relație de ordine parțială. Pe de altă parte, relația > nu este nici reflexivă, nici tranzitivă, nici antisimetrică (deoarece coaliția <8 poate diferi de la un caz la altul). Aceasta este o dificultate serioasă, care va complica cele ce urmează.

Deoarece vrem să analizăm jocurile cu ajutorul relației de dominare, ne interesează în mod natural jocurile, ale căror mulțimi de imputații au aceeași structură de dominare.

8.3.2. DEFINIȚIE. Două jocuri *u* și *v* de *n* persoane se numesc *izomorfe,* dacă există o aplicație biunivocă *f* a lui *E(u)* pe *E(v),* astfel ca, pentru orice *x, y* e *E(u)* și orice *SQN,*

$$_S y \text{ ^} f(x) > {}_S f(y).$$

Este posibil să fie dificil de verificat, pe baza definiției, dacă două jocuri sînt izomorfe. Avem însă următorul criteriu.

8.3.3. DEFINIȚIE. Două jocuri *u* și *v* de *n* persoane se

numesc *echivalente,* dacă există un număr pozitiv *r* și *n* constante reale ap.. . ,a_n, astfel ca, pentru orice *Sc N,*

$$v(S) = ru(8) + \text{X} \text{««•} \quad \text{ies}$$

Pe scurt , dacă două jocuri sînt echivalente, atunci unul se obține din celălalt printr-o transformare liniară a spațiilor utilității ale jucătorilor. Este ușor de arătat că echivalența implică izomorfismul. din definiție este prea tare, căci este foarte posibil ca jucătorii să nu ajungă la nici o înțelegere și să obțină deci mai puțin decît valoarea totală *v (N),* pe care o pot obține prin cooperare generală. Deși această obiecție este corectă, se va vedea mai departe că multe dintre conceptele noastre de „soluție" elimină toți vectorii care nu satisfac această condiție.

Se pune acum întrebarea care dintre aceste imputații se va obține ca rezultat al jocului. Aceasta este desigur o problemă dificilă (dacă nu chiar imposibil de rezolvat). Există totuși un caz în care răspunsul este trivial, anume cazul în care mulțimea *E(v)* este formată dintr-un singur element. Atunci rezultatul jocului va fi evident această imputație unică, independent de coalițiile formate. Această observație conduce la distincția între jocurile *esențiale* și cele *neesențiale.* Este evident (aplicînd den ori proprietatea de aditivitate) că

$$v\{N) > £\ v\ (\{»\}). \quad \text{ie.v} \qquad (8.2.4)$$

Dacă (8.2.4) este verificată ca egalitate, atunci *E(v)* este formată dintr-un singur punct*', și reciproc.

8.2.6. DEFINITIE. Un joc *v* se numește *esențial,* dacă t'(N) >5j ®({ı}), ie.v și *neesențial* în caz contrar.

Jocurile esențiale sînt acelea care prezintă interes.

8.3. DOMINARE. ECHIVALENȚĂ STRATEGICĂ. NORMALIZARE

Fie *x* și *y* două imputații într-un joc *v* dat. Să presupunem că jucătorii trebuie să aleagă între *x* și *y.* Putem găsi vreun

criteriu pentru a determina care dintre ele va fi preferată față de cealalaltă ?

Este evident că, exceptînd cazul cînd $x = y$, vor exista jucători care să prefere pe x față de y (acei i pentru care $x_i > y$^. Pentru că acești vectori sînt imputații, vor exista totodată jucători care să prefere pe y față de a?. Nu este deci suficient să spunem că *unii* jucători preferă pe x față de y. Pe de altă parte, nu se poate ca *toți* jucătorii să prefere pe x față de y (deoarece suma componentelor lui x sau y este $v(N)$). Esențial este însă dacă jucătorii care preferă pe x față de y sînt suficient de tari ca să poată impune alegerea lui x.

♦ > Anume x_t = t> ({<}), i = 1,..., n. *(N.T.)*

Unii autori renunță Ia condiția (8.2.2) și studiază funcții care satisfac doar condiția $v(0) = 0$, numite uneori jocuri *improprii.* în această carte vom considera numai jocuri *proprii,* adică funcții v care satisfac ambele condiții.

Prin definiție, $v(8)$ este valoarea maximin a jocului jucat între 8 și $N — 8$. *Să* presupunem acum că forma normală a jocului este cu sumă constantă (adică suma cîștigurilor tuturor jucătorilor este constantă, indiferent de desfășurarea jocului). Jocul dintre <8 și $N — 8$ este atunci strict competitiv și deci, dacă este finit, este verificată teorema minimax. Avem deci

$$v(S) + v(N - 8) = v(A^T). \quad (8.2.3)$$

Aceasta conduce la următoarea definiție.

8.2.4. DEFINIȚIE. Un joc (în formă caracteristică) se numește *joc cu sumă constantă,* dacă pentru orice S c N

$$v(8) + v(N - 8) = v(N).$$

Trebuie menționat că un joc poate fi cu sumă constantă în forma sa cai acteristică fără să fie cu sumă constantă în forma sa normală. (Este posibilă și situația inversă, dar nu pentru jocuri finite.)

Să presupunem că este jucat un joc de n persoane. Fără

a cerceta în detaliu structura particulară a coaliţiilor formate, am dori să ştim care sînt toţi vectorii de cîştig posibili. Presupunînd că jucătorii au ajuns la o anumită înţelegere, ei trebuie să-şi împartă utilitatea totală *v (N).* (într-un joc cu sumă constantă nu este necesară nici o înţelegere pentru aceasta.) Aceasta poate fi împărţită în absolut orice mod, dar este evident că nici un jucător nu va accepta mai puţin decît valoarea *v* ({£}), pe care o poate obţine acţionînd independent.

8.2.5. DEFINIŢIE. într-un joc *v* de *n* persoane se numeşte *imputaţie* un *n*-vector $x = (x_v \ldots, x_n)$, care satisface condiţiile

$$1) \quad \sum_{i \in N} X^{\wedge} = r(A),$$

$$2) \quad x_i > v(\{i\}) \text{ pentru orice } i \in N.$$

Notăm cu *E* (v) mulţimea tuturor imputaţiilor jocului *v.* Se poate argumenta că, exceptînd cazul jocurilor cu sumă constantă, condiţia 1)

In teoria plăţilor laterale funcţiile de utilitate ale diferiţilor jucători pot fi alese astfel ca rata de transfer a utilităţii între oricare doi dintre ei să fie 1 : 1. După cum am văzut în cazul a două persoane, aceasta înseamnă că, dacă o mulţime & de jucători (coaliţie) obţine o utilitate totală *v,* această utilitate poate fi împărţită între membrii lui S în orice mod posibil. Ne interesează deci utilitatea totală care poate fi obţinută de fiecare coaliţie.

8.2.1. DEFINIŢIE. într-un joc de *n* persoane notăm cuN={l,2,... ...,*n}* mulţimea tuturor jucătorilor. Orice submulţime nevidă a lui *N* (inclusiv *N* şi toate submulţimile formate dintr-un singur element) se numeşte *coaliţie.*

8.2.2. DEFINIŢIE. Se numeşte *funcţie caracteristică* a unui joc de *n* persoane funcţia *v,* definită pe mulţimea părţilor lui V, care asociază fiecărei coaliţii Sc*V valoarea maximin (corespunzătoare lui *8)* a jocului de două persoane jucat între coaliţiile $ şi *N — S.* Prin definiţie*’

$$v(0) = 0. \qquad (8.2.1)$$

v (8) este deci utilitatea pe care jucătorii din & o pot obține în joc (acționînd în cooperare), indiferent de ceea ce fac restul jucătorilor.

Dacă și *T* sînt coaliții disjuncte, este evident că, unindu-și forțele, ele pot realiza cel puțin tot atît de mult ca în cazul cînd acționează separat. Funcția caracteristică are deci proprietatea de *super- aditivitate*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ dacă } S \cap T = \emptyset. \qquad (8.2.2)$$

în studiul jocurilor de două persoane am văzut că ne putem dispensa în general de forma extinsă și ne putem mărgini la forma normală a jocului, care permite un studiu ușor al strategiilor mixte, elementul esențial al acestor jocuri. Elementul esențial al jocurilor de *n* persoane nu este însă randomizarea (folosirea strategiilor mixte), ci *formarea de coaliții.* Vom studia deci funcția caracteristică și nu forma normală a jocului. Funcția caracteristică dă posibilitățile diferitelor coaliții — presupunînd folosită o randomizare optimă (maximin) — și este astfel cea mai potrivită pentru studiul coalițiilor, în continuare vom identifica un joc cu funcția sa caracteristică.

8.2.3. DEFINIȚIE. Prin *joc de n persoane în formă caracteristică* se înțelege o funcție cu valori reale *v,* definită pe submulțimile lui *N* și care satisface condițiile (8.2.1) și (8.2.2).

♦> Pentru definiția lui *v (N) v=zi* p. 23. (*N.T.)* complet nou : formarea de *coaliții.* în cazul a două persoane este posibilă o singură coaliție. în cazul a *n* persoane există multe coaliții posibile și, prin urmare, pentru ca o coaliție să se formeze și să continue să existe un anumit timp, este necesar ca membrii coaliției să ajungă la o anumită stare de echilibru sau stabilitate. Orice teorie semnificativă trebuie să analizeze această idee de stabilitate.

Semnificația ideii de stabilitate se înțelege cel mai bine din următorul exemplu. Să considerăm un joc de trei persoane, puse în fața problemei de a forma coaliții. Dacă doi dintre jucători se coalizează, atunci al treilea jucător trebuie să plătească fiecăruia dintre ei o unitate. Dacă nu se formează nici o coaliție de doi jucători, atunci nu există nici un cîștig.

în acest exemplu simplu nu este prea mult de spus. Dacă nu presupunem nimic asupra relațiilor personale dintre cei trei jucători, se poate forma oricare dintre cele trei coaliții de doi jucători posibile, și ele nu se deosebesc cu nimic una față de alta. Cele trei cîștiguri (—2, 1, 1), (1, —2, 1), (1, 1, —2) corespunzătoare acestor trei coaliții apar ca un rezultat „natural" și pot fi considerate într-un anumit sens ca o „soluție" a jocului. Pe de altă parte, cîștigul (0, 0, 0), care este media celor trei cîștiguri, poate fi de asemenea conceput ca un gen de soluție a jocului. (Vom vedea mai departe în ce sens acestea sînt soluții.)

Să presupunem acum că jocul este ușor modificat prin aceea că, dacă se formează coaliția {2, 3}, atunci jucătorul 1 plătește 1,1 unități lui 2 și 0,9 unități lui 3. Această modificare pare să îmbunătățească perspectivele lui 2, care poate să obțină acum mai mult din aceeași acțiune. O analiză mai atentă arată însă că nu este așa. De fapt coaliția {2, 3} devine acum aproape imposibil de format (dacă cauze externe nu complică relațiile dintre 1 și 3), deoarece atît 1 cît și 3 au de cîștigat formînd coaliția {1, 3}. Prin urmare, jucătorul 2 este într-o poziție mai proastă ca înainte; într-adevăr, una dintre cele două coaliții posibile în care el poate intra este foarte nestabilă. El poate totuși remedia aceasta, dacă va plăti jucătorului 3 din cîștigul său 0,1 unități (presupunînd că o astfel de plată laterală este posibilă). Aceasta reduce jocul la situația precedentă.

Exemplul precedent ilustrează importanța *plăților laterale (marginale)* și, în al doilea rînd, necesitatea existenței unei anumite stabilități între diferitele cîștiguri într-o soluție. Ultima problemă va fi tratată mai departe ; ne vom ocupa mai întîi de plățile laterale.

încă o dată, este vorba de existența unui bun liniar transferabil. Să presupunem că un astfel de bun există; teoria dezvoltată în această ipoteză se numește *teoria plăților laterale.*

JOCURI DE ***n*** PERSOANE

8.1. JOCURI NECOOPERATIVE

în jocurile den persoane (cu n>3) intervine aceeași distincție, considerată pentru jocurile de două persoane cu sumă nenulă, între cazurile cînd regulele jocului permit, sau respectiv interzic, cooperarea între jucători. Să considerăm mai întîi cazul necooperativ.

în jocurile necooperative problema principală este existența punctelor de echilibru. Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

8.1.1. TEOREMĂ. *Orice joc finit necooperativ de n persoane are cel puțin un punct de echilibru format din strategii mixte.*

Demonstrația acestei teoreme nu va fi dată aici, fiind o extensie a demonstrației teoremei 7.1.2, pentru cazul de față.

Deși teorema 8.1.1 este cu siguranță un rezultat important, trebuie subliniat că toate dificultățile întîlnite relativ la punctele de echilibru ale unui joc bimatriceal sînt prezente și aici. Mai mult, calculul punctelor de echilibru pentru este incomparabil mai dificil decît în cazul *n = 2.*

în general nu există deosebiri esențiale între teoria jocurilor necooperative de *n* persoane și respectiv de două persoane cu sumă generală.

8.2. JOCURI COOPERATIVE

Să considerăm acum cazul în care cooperarea este permisă. Am văzut că, în cazul necooperativ, nu există mare diferență între jocurile de două persoane și jocurile de *n* persoane, ultimele fiind o generalizare a primelor. în jocurile cooperative apare însă un aspect

4. In problema 2.9 am arătat că un joc de două persoane cu sumă constantă se poate rezolva prin *metoda jocului fictiv.* Arătați că această metodă nu poate fi folosită pentru a obține puncte de echilibru ale unui joc bimatriceal, folosind jocul (A, *B),* unde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Să presupunem că jucătorii Încep prin a folosi strategiile (1, 1). în acest caz va urma o serie de partide cu strategiile (1, 1), urmată de o serie de (1, 3) și in continuare serii de (3, 3), (3, 2), (2, 2), (1, 1) etc., in mod ciclic.

b) Lungimea fiecărei serii este cel puțin dublul lungimii seriei precedente.

c) Strategiile empirice nu converg, ci ciclează. Nici unul dintre cele două cicluri nu trece prin punctul (1/3, 1/3, 1/3), care este unicul punct de echilibru.

Trebuie deci să considerăm posibilitatea amenințărilor. Se vede că, pe frontiera Pareto-optimă a lui *S,* utilitatea este transferabilă (prin randomizare) în raportul 1 : 1. Considerăm deci jocul matriceal

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 8/3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Acest joc are un punct șa, anume elementul —2. Fiindcă utilitatea totală maximă a celor doi jucători este 5, obținem „soluția negociată cu amenințări" (3/2, 7/2). Aceasta reflectă evident faptul că jucătorul II are posibilități de amenințare mai mari.

PROBLEME

1. Concepem un joc de negocieri ca un joc necooperativ în care „strategia" fiecărui jucător constă în a exprima o pretenție. Dacă pretențiile (u, a) sînt consistente, adică punctul (u, u) aparține mulțimii admisibile *S,* atunci cei doi jucători primesc cîș- tigurilc cerute ; în caz contrar ei primesc valorile lor minimax (sau de amenințare) («*,»*)•

a) Orice punct al frontierei Pareto-optime a lui S este un punct de echilibru.

b) Presupunem *u** = t>* = 0 și fie *g* indicatorul mulțimii S (adică funcția egală cu 1 pe S și egală cu 0 pe complementara lui S). Dacă cei doi jucători pretind (u, *v),* atunci ciștigurile lor sînt *(ug* (u, *v), vg (u,* a)).

c) Fie *h* o funcție nenegativă arbitrară. Să presupunem că, dacă jucătorii pretind (u, »), atunci ciștigurile sint (uA, *vh.).* Arătați că dacă (u_A, $â_A$) maximizează funcția iwh_r atunci (u_A, u_A) este un punct de echilibru.

d) Fie $A_,$, A_2, ... un șir de funcții continue nenegative care converg către *g.* Dacă (u, ă) este soluția Nash (valoarea negociată) a jocului, atunci există un șir de puncte (u,-, *Vj),* fiecare fiind un punct de echilibru pentru jocul de negocieri cu ciștigurile respectiv *(uhj, vhj),* care converge către (u, ă).

2. Demonstrați existența strategiilor de amenințare „optime" in modelul de negociere modificat al lui Nash (teoremele 7.3.1 și 7.3.2).

3. Considerăm „superjocul" care constă din repetarea de 100 ori a jocului din exemplul 7.1.4. în superjoc fiecare jucător are un număr foarte mare de strategii pure, fiecare reprezentînd o regulă de a decide strategia care trebuie aleasă în partida n pe baza „istoriei superjocului" (adică a ceea ce s-a întîmplat în primele zi — 1 partide). Arătați că, dacă două strategii formează un punct de echilibru, atunci folosirea acestor strategii conduce pe fiecare jucător la folosirea strategiei a doua în fiecare partidă a jocului.

b) Arătați că totuși, pentru n>2, strategia pentru superjoc o_n, care

constă în: „joacă prima strategie (cooperativă) în primele *n* partide, alîta timp cît oponentul folosește prima sa strategie, și a doua strategie in ultimele 100 —n partide", este mai bună, în sensul că dă un cîștig mai bun împotriva npostei optime a adversarului.

c) Arătați că dacă superjocul constă din *X* partide, unde *X* este o variabilă aleatoare cu distribuție exponențială *P* (n) = Zce-"'i, atunci există puncte de echilibru care implică folosirea primei strategii în fiecare partidă a jocului. optime pentru jocul bimatriceal (A, *B)* coincid cu strategiile optime pentru jocul matriceal (cu sumă nulă) *A — B,* pe care știm să îl rezolvăm.

7.3.3. Exemplu. Să considerăm jocul bimatriceal (A, *B)* dat de matricea

$$\begin{matrix} I\,(1,\,4) & (-'/_3,\,-4)1 \\ \text{l}(-3,\,-1) & (4,\,1)\quad) \end{matrix}$$

Presupunînd că nu există nici un bun transferabil, mulțimea $ este acoperirea convexă a celor patru puncte $(a_{ij};\ b_{is})$ (fig. 7.5).

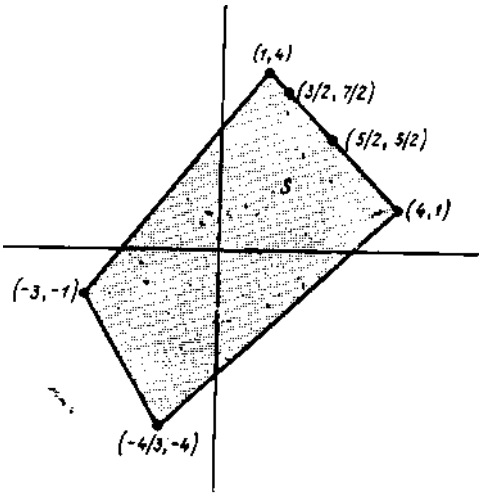


Fig. 7.5.

Valorile maximin sînt pentru ambii jucători 0, obținute prin

strategiile mixte (3/4, 1/4) și respectiv (1/2, 1/2). Întrucît $ este „aproape simetrică”, valorile corespunzătoare primei scheme a lui Nash sînt (5/2, 5/2). Această soluțienu ține însă seama de posibilitățile jucătorului II de a exercita presiuni; realitatea este că jucătorul I nu poate face mare lucru împotriva lui II, dacă acesta folosește prima sa strategie pură.

tivul jucătorului II este obținerea unui punct al unei drepte situate cit mai sus posibil.

Se pune întrebarea dacă există puncte de echilibru formate din strategii de amenințare (un punct de echilibru pentru aceste jocuri se definește în modul obișnuit). Răspunsul este afirmativ.

7.3.1. TEOREMĂ. *Orice joc bimatriceal posedă cel puțin un punct de echilibru, format din strategii de amenințare (x, y).*

Fiindcă obiectivele celor doi jucători în alegerea strategiilor lor de amenințare sînt direct opuse, se poate demonstra de asemenea următorul rezultat.

7.3.2. TEOREMĂ. *Dacă (x', y') și (x", y") sînt puncte de echilibru formate din strategii de amenințare, atunci (x', y") și (x", y'} au aceeași proprietate. în plus, cîștigurile negociate în sensul lui Nash sînt aceleași pentru (x', y') și (x", y").*

Demonstrațiile teoremelor 7.3.1 și 7.3.2 sînt lăsate ca exerciții; menționăm numai că ele sînt o modificare a demonstrației teoremei 7.1.2 și, respectiv, o foarte ușoară modificare a demonstrației teoremei 2.1.2. Să observăm că în baza teoremei 7.3.2 putem vorbi de fapt despre *strategii de amenințare optime* (în loc de puncte de echilibru).

O problemă importantă este calculul strategiilor de amenințare optime. în general aceasta poate fi o problemă complicată, deoarece valorile negociate corespunzătoare unei perechi de strategii de amenințare nu depind numai de numerele $xAy^{1,}$ și xBy^{1}, ci și de forma frontierei Pareto-optime a mulțimii >8. Deoarece singura condiție impusă este că <8 este convexă, nu există nici o metodă generală, în unele cazuri particulare problema poate fi totuși simplă.

în particular, dacă utilitatea este liniar transferabilă între cei doi jucători, problema devine extrem de simplă. într-adevăr, alegînd scalele utilității astfel încît rata de transfer a utilității între jucători să fie 1 : 1, o adaptare evidentă a interpretării teoremei 7.2.2 arată că valorile negociate corespunzătoare strategiilor de amenințare *x* și *y* sînt

$$V = \frac{xAy^1 - xBy^f + k - xBy^1 - xAy^1}{2} \quad \frac{\mathbf{4}- k}{2} \quad U =$$

unde *k* este utilitatea maximă care poate fi obținută de cei doi jucători, dacă ei acționează împreună. Aceasta înseamnă însă că jucătorul I va încerca să maximizeze *x* (A — *B) y',* iar II va încerca să minimizeze aceeași expresie. Prin urmare, strategiile de amenințare în cazulunui acord pe baza axiomelor NI—N6, rezultatul negocierilor este *(u, v),* unde *(u, v)* este punctul din $ care maximizează *g (u, v) = = (u — xAy[1]) (v — xBy*)* cu restricția *u > xAy[1].*

Un desen va ilustra cel mai bine modul de lucru al acestei scheme. O mulțime <8 tipică (convexă, închisă și mărginită) este reprezentată în fig. 7.4. Curba îngroșată 8° este mulțimea punctelor din 8 Pareto- optime, adică care satisfac axioma N3. Prin fiecare punct din 8° în care există tangentă la 8° se duce o dreaptă cu panta egală cu panta tangentei luată cu semn schimbat. Printr-un punct în care nu există tangentă, de exemplu punctul C, se duc cele două drepte corespunzătoare tangentelor la dreapta și la stînga în *C* la 8° . Se poate arăta că, datorită convexității lui 8, aceste drepte se pot intersecta numai în afara mulțimii 8.

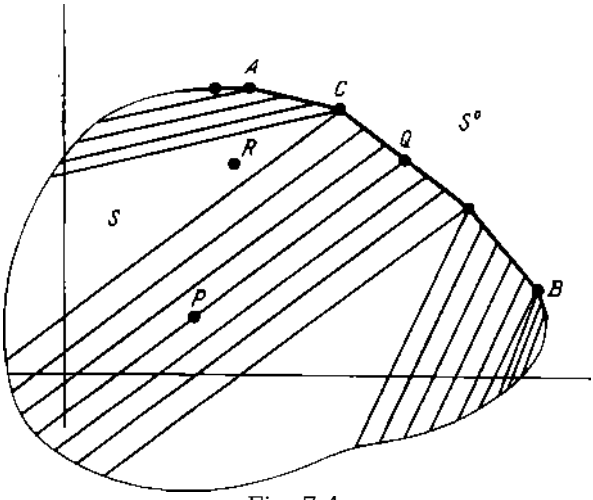


Fig. 7.4.

Să presupunem acum că punctul *P* al valorilor asociate strategiilor de amenințare *x și y* este pe una dintre aceste drepte. Valoarea negociată a jocului (pe baza axiomelor lui Nash) este punctul *Q* în care această dreaptă intersectează pe 8°. Dacă punctul corespunzător valorilor de amenințare este situat în unghiul format de două dintre aceste drepte care pornesc din același punct al lui 8°, atunci soluția negociată este acest punct din 8° (de exemplu *C* este soluția negociată corespunzătoare punctului *R).* Astfel, obiectivul jucătorului I în alegerea strategiei sale de amenințare este obținerea unui punct al unei drepte din această familie situate cît mai jos posibil; obiec- toate punctele *(u, v)* cu proprietatea că $u > u^*$, $v > v^*$ și $u + k$ (unde k este utilitatea maximă posibilă pe care cei doi jucători o pot obțineîmpreună; vezi fig. 7.3). Soluția lui Nash corespunzătoare va fi *(u, v),* unde

$$u = (u^* — v^* + k)/2,$$

$$v = (®^* — u^* + k)/2.$$

Este ușor de văzut că $u + v = k$ și $u — v = u^* — v^*$. Prin urmare, în acest caz diferența dintre utilitățile obținute conform soluției Nash este egală cu aceea din cazul (necooperativ) folosirii strategiilor maximin, utilitatea

obținută suplimentar prin cooperare fiind împărțită în mod egal între cei doi jucători.

7.3. AMENINȚĂRI

împotriva soluției lui Nash în problema negocierilor se poate ridica o obiecție serioasă, anume că nu ia în considerare amenințările. Este necesară o analiză a noțiunii de amenințare pentru a corecta această slăbiciune. O amenințare este efectivă numai dacă este verosimilă (demnă de crezut) și dacă aplicată ar duce la îmbunătățirea poziției amenințătorului în raport cu persoana amenințată.

Nash sugerează următoarea schemă de negocieri în trei pași pentru tratarea cazului amenințărilor :

1. Jucătorul I își alege o strategie „de amenințare" *x.*

2. Jucătorul II, fără a cunoaște *x,* își alege o strategie de amenințare *y.*

3. Cei doi jucători negociază, luînd ca bază de plecare a negocierilor strategiile de amenințare alese. Dacă pot ajunge la un acord, atunci acest acord este aplicat și se obțin cîștigurile corespunzătoare. Dacă jucătorii nu pot realiza un acord, atunci ei sînt obligați să folosească strategiile de amenințare *x* și *y* alese, cîștigurile fiind determinate în consecință.

Se ridică întrebarea firească : care este urmarea acestor amenințări. Să presupunem însă că fiecare jucător este legat într-un fel sau altul de amenințarea sa. Această obligație de a folosi amenințările anunțate (în cazul eșecului negocierilor) înseamnă că valorile maximin u^* și v^* sînt înlocuite prin valorile de amenințare $xAy^{1,}$ și xBy^*.

e $ astfel ca *u>u*, v = v*,* atunci nu există nici un *[u*, v)* e <8 astfel ca *v >v*.* în aceste condiții luăm drept *(u, v)* punctul din £ care maximizează *u* și satisface restricția *v = v*.* Analog, dacă există *[u, v) eS* astfel *cau = u*, v > v*,* atunci nu există nici un *(u. v*)* e £ astfel ca *u >u*,* și luăm drept *[u, v)* punctul din $ care maximizează *v* și satisface restricția *u = u*.* Se verifică cu ușurință că soluția astfel definită verifică axiomele NI —N6 ; se arată de asemenea ușor că, datorită axiomelor NI, N2 și N3, această soluție este unică.

Teorema 7.2.2 arată deci că sistemul de axiome ale lui Nash garantează existența unei soluții unice, numită *soluție Nash.* Conform lemei 7.2.4, dacă frontiera lui & este netedă (adică are tangentă) în punctul («, *v_),* atunci această tangentă este dreapta de ecuație *h (u, v) = h (u, v).* Dar coeficientul unghiular al tangentei frontierei lui *S,* într-un punct arbitrar al acesteia, reprezintă raportul în care utilitatea poate fi transferată de la un jucător la celălalt *[rata de transfer* a utilității). Teoria lui Nash arată deci, pe scurt, că utilitatea suplimentară obținută prin cooperare (în plus față de utilitățile maximin *u** și *v*)* trebuie să fie repartizată între cei doi jucători în părți, al căror raport este egal cu rata (raportul) de transfer al utilității între jucători. Deoarece utilitatea nu este presupusă a fi liniar transferabilă, este posibil să existe un singur punct în care utilitatea să fie transferabilă la această rată dată (fig. 7.2).

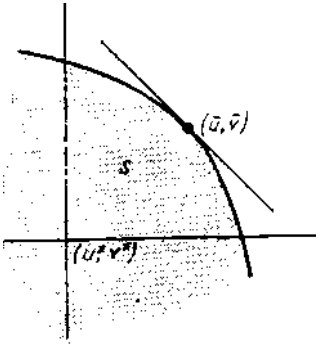


Fig. 7.2.

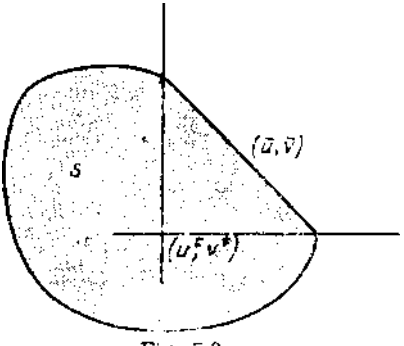


Fig. 7.3.

Desigur, problema se simplifică cînd utilitatea este liniar transferabilă. într-adevăr, putem presupune (printr-o schimbare a scalelor utilității, dacă este necesar) că

utilitatea poate fi transferată la rata 1 : 1 (adică o unitate din utilitatea jucătorului I, transferată lui II, mărește utilitatea acestuia exact cu o unitate). Atunci & conține
Să considerăm mulțimea

$$U = \{(u, v) \mid h(u, v) < h(u, \text{ii})\}$$

(vezi fig. 7.1). Conform lemei 7.2.3, avem $S \subset U$. Fie T imaginea lui U prin transformarea liniară

Este ușor de văzut că T este mulțimea {(«', + v'<2} și că $u^{*\prime} = v^{*\prime} = 0$. Deoarece T este simetrică, din N6 rezultă că soluția problemei de negociere este un punct al dreptei $u' = v'$; conform axiomei N3, acesta trebuie să fie punctul (1,1). Inversînd transformarea (7.2.3), din N5 rezultă că sohiția problemei *(U, u*, v*)* este *(u, v)*. Deoarece («, *v) e 8,* rezultă că *(u, v)* este soluție și pentru problema *(8, u*, v*).*

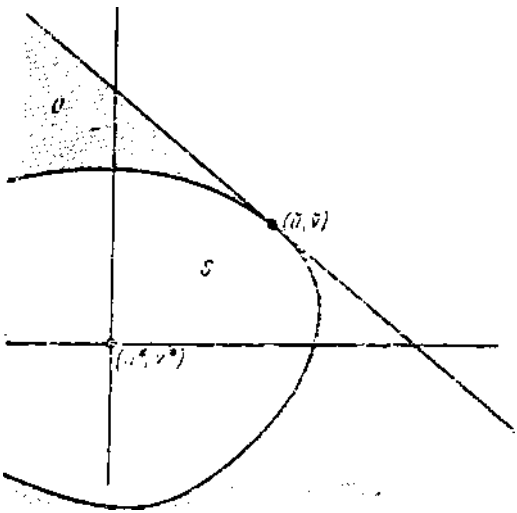


Fig. 7.1.

Să presupunem acum că ipoteza lemei 7.2.3 nu este adevărată, adică nu există nici un punct (u, *v) e S* astfel ca *u*

*>u** și *v* >v*. Din convexitatea lui £ rezultă că, dacă există *(u, v)* e

Demonstrație. Să presupunem că există *(u, v) e S* astfel ca *h(u,v) > > h (u, v).* Dacă 0< e<l și *u' = u* + e *(u — u), v' = v + e(v — v),* atunci («', *v')e S* deoarece $ este convexă. Din liniaritatea lui *h* avem *h (u — u, v — v)* >0. Este evident că

$$g(u', v') = g(u, v) + eh(u - u, v - v) + e^2 (u - u)(v - v).$$

Dacă e este suficient de mic, atunci ultimul termen este neglijabil. Deoarece penultimul termen este pozitiv, rezultă că *g (u', v')>g* (u, *v),* care contrazice maximalitatea lui *g(u,v).*

Lema 7.2.4 arată în esență că dreapta care trece prin («, *v)* și care are drept coeficient unghiular opusul coeficientului unghiular al dreptei care unește punctele («, *v)* și (u*, *v*)* este o dreaptă de sprijin (suport) pentru *S,* adică *S* este conținută într-unul dintre semiplanele determinate de această dreaptă.

Putem demonstra acum teorema 7.2.2. Vom demonstra de fapt că, în ipotezele lemei 7.2.3, punctul *(u, v)* care maximizează *g(u, v)* este soluția problemei de negociere. Apoi vom demonstra teorema în cazul cînd ipoteza lemei nu este verificată.

Demonstrația teoremei 7.2.2. Să presupunem că ipoteza lemei 7.2.3 este verificată. Atunci punctul (u, *v)* care maximizează *g (u, v)* este bine definit. Acest punct satisface prin construcție axiomele NI, N2 și de asemenea N3, deoarece din *(u, v) > (u, v)* și *(u, v) =f= (ii, v)* rezultă *g (u, v)>g (u, v),* și N4 deoarece, maximizînd *g (u, v)* pe mulțime *8,* el maximizează această funcție și pe orice submulțime *T* căreia îi aparține. Acest punct satisface N5, deoarece, notând *u' =* 04 *u* + Șj și *v' =* a₂ *v* + 0₂, avem

$$g'(u', v') = [u' - (\text{ț}u^* + \text{P}_J)]\,[V - (a_2 r^* + 0_2)] = aia_2?\ (^u,$$

și deci, dacă *(u, v)* maximizează *g (u, v),* atunci *(u', v')* maximizează *g' (u', v').* în sfîrșit, (w, *v)* verifică axioma N6.

într-adevăr, să presupunem că mulțimea S este simetrică în sensul axiomei N6 și că ■u* = *v*.* Atunci *(v, u)* e >8. Dar evident *g (ii, v) = g (v, u)* și, deoarece *(u, v)* este unicul punct care maximizează *g (u, v)* pe *S,* rezultă *(u,v) = = (v, u)* și deci *u = v.*

Am arătat astfel că *(ii, v)* verifică axiomele NI—N6. Să arătăm acum că aceasta este singura funcție care verifică sistemul acestor axiome. Fie *(ii, v)* definită ca mai sus.

Din păcate, N7 nu este compatibilă cu axiomele N2 și N3. Deoarece este dificil de renunțat la oricare dintre acestea două, renunțăm la N7 (deși s-ar putea susține că N7 nu diferă prea mult de N4). Nu este necesar să mai considerăm alte axiome suplimentare, datorită următoarei teoreme remarcabile.

7.2.2. TEOREMĂ. *Există o funcție* **<p** *unică, definită pentru orice problemă de negociere (S, x*, y*), care satisface condițiile* NI—N6.

Pentru demonstrație avem nevoie de următoarele leme.

7.2.3. LEMĂ. *Dacă există puncte (u, v)* **e** *£ astfel ca u>u*, v>v*, atunci există un punct unic (u, v), care maximizează funcția*

$$g(u, v) = (u — u^*)\,(v — v^*)$$

pe mulțime punctelor lui 8 cu **w >** *u*.*

Demonstrație. Prin ipoteză această submulțime *S'* a lui <8 este compactă. Funcția *g* este continuă, deci își atinge maximul *Uf* pe mulțimea *8'.* Să presupunem că există două puncte *(u', v')* și *(u", v")* care maximizează *g(u,v).* Deoarece conform ipotezei >0, nu putem avea *u' = u",* deoarece ar rezulta *v' = v"* și deci cele două puncte ar coincide. Să presupunem că *u' <u"* ; atunci rezultă *v'* >v".Notînd
A
u = (u' **4-** *u")/2,* **A** *v = (v'* + v")/2 și ținînd seama de faptul că >8
este convexă, avem **A A** *(u, v)* e <8. Evident

. AA, (u' - U*) + (11" - 11*) (1/ - P*) + (u" - «*)
n 11. «) - —---------- . ---------- ---------- - =

$$\frac{(ti' - n^*)\,(y' - i>^*)}{2} \qquad \frac{(u'' - u^*)\,(i>'' - v^*)}{2} + \frac{(u' - u'')\,(p'' - v')}{4}$$

în ultima expresie primii doi termeni sînt fiecare egal cu Jf/2, iar

al treilea termen este pozitiv. Deci $g\ (u, v)>m$, care contrazice faptul că M este valoarea maximă. Prin urmare, punctul (u, *v)* care maximizează pe g este unic.

7.2.4. LEMĂ. *Fie 8, (u*, v*) și (u, v) ca în Ierna* 7.2.3 *și fie*

$$h\ (u, v) = (v - v^*)\ u + (u - u^*)\ v.$$

Atunci h (u, v) < h (u, v) pentru orice (u, v) e 8. personalitatea și abilitatea de negociere a fiecărui jucător, următoarele axiome sînt condiții rezonabile care trebuie impuse oricărei asemenea funcții (axiomele lui John Nash) :

7.2.1. NI *(Rațională individuală), (u, v)> (u*, v*).*
N2 *(Admisibilitate), (u, v) e S.*
N3 *(Optimalitate Pareto).* Dacă *(u, v)e 8* și *(u, v) > (u, v),* atunci *(u, v) = (u, v).*
N4 *(Independența față de alternativele nesemnificative).* Dacă *(u, v)e T_c_ S* și <p *(8, u*, v*) = (u, v),* atunci <p *(T, u*, v*) = (u, v).*
N5 *(Invarianța față de transformări liniare).* Dacă *T* este imaginea lui $ prin transformarea liniară

$$u' = ajU + v' = ot_2v + p_2$$

și dacă *<?(S, u*, v*) = (u, v),* atunci

$$<p\ (T,\ ^u^* + p_n\ a_2v^* + Ș_2) = («!«+ p_n\ a._2v + Ș_2).$$

N6 *(Simetrie).* Dacă <8 este simetrică, adică (u, *v) e S <-> (v, u)* e *S,* și dacă *u* = v** și <? *(8, u*, v*) = = (u, v),* atunci *u = v.*

Dintre aceste cinci axiome, NI, N2 și N3 sînt firești și nu necesită nici o justificare. N4 postulează că, dacă punctul *(u, v)* este soluția unei probleme de negociere, soluția unei probleme cu o mulțime admisibilă mai largă este fie *(u, v),*

fie unul dintre punctele noi adăugate, dar în nici un caz un punct diferit de *(u, v)* al mulțimii admisibile inițiale. Axioma a fost uneori criticată, între altele pentru această ultimă restricție. Axioma N5 este suficient de naturală, dacă admitem că orice funcție de utilitate este la fel de bună ca alta. Ea poate fi criticată însă dacă se introduc utilități absolute (v. §6.4). în sfîrșit, N6 este complet acceptabilă dacă tratativele se desfășoară între jucători echivalenți; ea poate să nu fie acceptabilă, dacă tratativele sînt între jucători de naturi diferite, de exemplu între o persoană și un întreg grup.

Alte cîteva axiome pot fi luate în considerație pentru o funcție de negocieri, de exemplu

N7 *(Monotonie).* Dacă *T <= S,* atunci

<p *(T, x*, y*)* < <p *(8, x*, y*).* litatea poate fi transferată de la un jucător la celălalt (deși nu totdeauna în mod liniar).

Esențială pentru construcțiile următoare este mulțimea tuturor rezultatelor jocului, care pot fi obținute prin cooperarea celor doi jucători. Alegînd pentru fiecare jucător o funcție de utilitate, această mulțime se aplică într-o submulțime a planului euclidian B_2. Imaginea primei mulțimi prin această aplicație este închisă și mărginită superior (în sensul că suma coordonatelor este mărginită superior). în plus, această imagine este convexă, deoarece sînt admise loterii (adică strategii mixte corelate) și funcțiile de utilitate sînt liniare în raport cu loteriile. Problema se reduce astfel la alegerea unui punct al acestei mulțimi, satisfăcător pentru ambii jucători.

Pentru un joc de două persoane cu sumă arbitrară există deci o anumită submulțime £ din R_2, numită *mulțime admisibilă,* cu proprietatea că, pentru orice (w, *v)* e *S,* este posibil ca cei doi jucători, cooperînd, să obțină utilitățile *u* și respectiv *v.* în general se întîmplă însă că, cu cît un jucător obține mai mult, cu atît poate obține celălalt mai puțin (deși aceasta nu constituie o regulă). Cît de mult va accepta un jucător să dea celuilalt? Și cît de puțin va accepta ca preț al cooperării sale?

Deși este desigur imposibil de prevăzut cum va acționa o persoană (sînt multe deosebiri de personalitate care trebuie luate în considerare), există totuși un minim evident al cîștigului pe care un jucător îl va accepta, și anume cîștigul pe care îl poate obține acționînd în mod independent,

indiferent de acțiunea celuilalt jucător. Acesta este evident valoarea maximin a jocului, corespunzătoare jucătorului considerat. Să notăm aceste valori u^* și v^*:

$$u^* = \max_{x} \min_{y} xAy^{l}, \tag{7.2.1}$$

$$v^* = \max_{y} \min_{x} x\,By^{l}, \tag{7.2.2}$$

unde x si y parcurg toate strategiile mixte ale jocului bimatriceal (A, *B).* ’

Să presupunem că sînt date mulțimea £ și valorile maximin *{u*,* v*). Vrem să determinăm o regulă care să asocieze unui astfel de triplet ţS, u*, v*) o soluție a negocierilor*

$$o(S, u^*, v^*) = (u, v).$$

Se pune întrebarea naturală, cum trebuie să fie definită o astfel de funcție. Deși — repetăm — rezultatul va depinde în orice caz de

7.1.3. Exemplu. *(Bătălia sexelor).* Să considerăm jocul bimatri- **ceal**

((4,D (o, on
k(0, 0) (1, 4)J

Este evident că strategiile pure x = (1, 0) și y = (1, 0) formează un punct de echilibru; de asemenea x' = (0, 1) și y' = (0, 1). Dar *(x, y')* și *(x', y)* nu sînt puncte de echilibru. în plus, cișt igurile corespunzătoare punctelor de echilibru *(x, y)* și *(x', y')* sînt diferite : jucătorul I va prefera *(x, y),* jucătorul II va prefera *(x', y').* Astfel nu este clar că aceste puncte de echilibru sînt complet stabile; chiar dacă jucătorul I știe că II va folosi strategia sa (pură) *y',* el poate continua să folosească *x* în loc de *x',* sperînd că aceasta va determina pe II să treacă la strategia *y.* în general este dificil de spus ce se va întîmpla. (Să atragem atenția cititorului că strategiile mixte x'' = = (4/5, 1/5) și y'' = (1/5, 4/5) formează de asemenea un punct de echilibru.)

Chiar dacă există un singur punct de echilibru (ceea ce se întîmplă adeseori), nu este evident că acest punct de

echilibru este exact ceea ce dorim.

7.1.4. Exemplu. Să considerăm jocul

$$\begin{matrix} /(\ 5,\ 5) & (0,\ 10)\backslash \\ 1(10,\ 0) & (1,\ 1)] \end{matrix}$$

Este ușor de văzut că linia a doua domină prima linie (dominarea fiind definită relativ la prima componentă a cîștigului, deoarece este vorba de strategiile jucătorului I), și a doua coloană domină prima coloană (în sensul cîștigurilor jucătorului II). Singurul punct de echilibru este dat deci de strategiile pure secunde ale fiecărui jucător, care dă cîștigurile (1, 1). Dacă însă ambii jucători joacă „greșit", adică aleg prima strategie pură, cîștigul rezultat (5, 5) este pentru fiecare mai bun. Dificultatea este aici că fiecare jucător poate cîștiga și mai mult, trăgîndu-1 pe sfoară pe celălalt.

7.2. PROBLEMA NEGOCIERILOR

Să considerăm acum cazul jocurilor în care este permisă *cooperarea* între cei doi jucători. Pot fi deci încheiate acorduri, care creează obligații reciproce, este permisă corelarea strategiilor mixte, și uti-

ca $Ai.y^* > xAy^1$ și deci $c_i > 0$. Fiindcă c_i sînt toți nenegativi, rezultă

Fiindcă xAy^1 este o medie ponderată (cu ponderile $x^\wedge$ a valorilor $A_{\ell}.y^j$, există un i astfel ca $x_i > 0$ și $A_e y^j < xAy^1$. Pentru acest i avem = 0 și deci

$$+ \sum_k c_k$$

Prin urmare, x' $x.$ în al doilea caz se arată că $y' = f = y.$ Așadar, $(x', y') = (x, y),$ dacă și numai dacă (x, y) este un punct de echilibru.

Deoarece mulțimea tuturor perechilor de strategii este o mulțime convexă, închisă și mărginită, transformarea continuă T definită mai înainte are un punct fix, conform teoremei de punct fix al lui Brouwer. Se vede că acest punct fix este un punct de echilibru.

Să observăm că demonstrația teoremei 7.1.2. poate fi extinsă cu ușurință pentru existența punctelor de echilibru în jocuri finite de n persoane. Să mai observăm că demonstrația dată este o demonstrație de existență și nu oferă nici o metodă pentru găsirea punctelor de echilibru.

Problema determinării punctelor de echilibru ale jocurilor bima- triceale a fost abordată prin diferite metode, cu oarecare succes. Cititorul este îndrumat spre literatura de specialitate pentru detalii și metode. în locul prezentării acestor metode preferăm să discutăm dificultățile legate de noțiunea de punct de echilibru; aceste dificultăți sînt mai clare dacă comparăm cu noțiunea paralelă de strategii optime ale unui joc matriceal de sumă nulă.

Am văzut în teorema 2.1.2 că, într-un joc cu sumă nulă, perechile de echilibru se pot interschimba și sînt echivalente în sensul că, dacă (x, y) și (x', y') sînt perechi de echilibru pentru jocul matriceal $A,$ atunci și (x, y') și (x', y) sînt perechi de echilibru și în plus $xAy^* = = x'Ay'^1.$ Aceasta înseamnă că apartenența la o pereche de echilibru este o proprietate intrinsecă a vectorului x (care nu depinde de vectorul $y,$ împreună cu care formează o pereche de

echilibru), și astfel putem considera *strategii optime în loc de puncte de echilibru.* Exemplul următor arată că această proprietate nu este valabilă pentru jocuri cu sumă arbitrară.

și respectiv n-vectori cu componente nenegative, a căror sumă este egală cu 1.

7.1.1. DEFINIȚIE. O pereche de strategii mixte *(x*, y*)* senumește *punct de echilibru* al jocului bimatriceal (A, *B),* dacă pentiu orice strategii mixte *x* și *y* avem

$$xAy^{*l} < x^{*}Ay^{*\prime},\ x^{*}By' < x^{*}By^{*\prime}$$

Ne interesează desigur dacă astfel de perechi există. Teorema următoare dă un răspuns afirmativ.

7.1.2. TEOREMĂ. *Orice joc bimatriceal posedă cel puțin un punct de echilibru.*

Demonstrație. Fie *(x, y)* o pereche arbitrară de strategii mixte pentru jocul bimatriceal *(A, B).* Definim

$$= \max\ \{\text{J.j.}\ y^{j} - xAy^{l},\qquad d_{j} = \max\ \{xB.j - xBy^{l},$$

$$x_i'$$

$$\frac{\hat{}i+cj}{1+X}\qquad y'i\qquad \frac{y_j + d_j}{1+X}$$

Transformarea $T(x, y) = (x', y')$ este evident continuă. Se vede imediat că x' și y' sînt strategii mixte.

Vom arăta acum că $(x', y') = (x, y)$, dacă și numai dacă *(x, y)* este un punct de echilibru. Dacă *(x, y)* este un punct de echilibru, este evident că, pentru orice *i,*

$$A_t.\ y^{j} < xAy'$$

și deci c, = 0. Analog $d_j = 0$ pentru orice *j.* Prin urmare, $x' = x$ și $y' = y$-

Pentru implicația inversă să presupunem acum că *(x, y)* nu este un punct de echilibru, adică fie există un *x* astfel ca *xAy* > xAy*,* fie există un *y* astfel ca *xBy~[f]> xBy[1].* Să presupunem că sîntem în primul caz (în al doilea caz demonstrația este identică). Deoarece *xAy[1]* este o medie ponderată a valorilor $A_t.y|$ există un *i* astfel

JOCURI DE DOUĂ PERSOANE CU SUMĂ ARBITRARĂ

7.1. JOCURI BIMATRICEALE (NECOOPERATIVE)

Am studiat pînă în prezent numai jocuri cu sumă nulă. Aceste modele descriu suficient de exact jocurile de societate ca și jocurile în care mizele sînt suficient de mici (astfel incit utilitatea este aproximativ proporțională cu suma de bani). Dacă însă mizele sînt mai complicate, așa cum se întîmplă adesea în situații economice, nu mai este în general adevărat că interesele celor doi jucători sînt direct opuse; adeseori ambii jucători au de cîștigat dintr-o cooperare. Astfel de situații sînt jocurile cu sumă arbitrară; ele includ drept caz particular jocurile cu sumă nulă.

Un joc finit de două persoane cu sumă generală poate fi reprezentat printr-o pereche de matrice $A = (a_0)$ și $B = (b_y)$, de dimensiune *m X n,* sau, echivalent, printr-o matrice (A, *B),* de dimensiune *m* x *n,* ale cărei elemente sînt perechile ordonate b_{tj}*).* Cantitățile și b_{tj} reprezintă cîștigurile (în unități de utilitate) jucătorilor I și respectiv II, presupunînd că folosesc strategiile lor pure *i* și respectiv *j.* Un joc de această formă se numește *joc bimatricedl.*

Este evident că cooperarea între jucători poate fi în multe cazuri avantajoasă pentru ambii jucători. în alte cazuri însă cooperarea poate fi interzisă prin regulile jocului (de exemplu printr-o lege antitrust). Distingem deci două tipuri de jocuri bimatriceale.

1. Jocurile *necooperative,* în care este interzis orice fel de acord (înțelegere), de exemplu pentru corelarea strategiilor și plății reciproce.

2. Jocuri *cooperative,* în care orice astfel de cooperare este permisă, începem prin a trata cazul necooperativ. Ca și în cazul jocurilor cu sumă nulă definim strategiile mixte pentru jucătorii I și II ca *m-*

PROBLEME

1. Completați demonstrația teoremei 6.2.2.

2. (Demonstrația de imposibilitate a lui Arrow). Conslderind numai utilități or" dinale (nu și loterii), este adeseori imposibil să se determine ce decizie trebuie să ia un grup de persoane.

Să considerăm un grup de *m* persoane, avind de ales intre n alternative Ap A_2, ..., $A_{„}$. Numim *profil al preferințelor individuale* o funcție care asociază fiecărei persoane *i* o ordine slabă pe mulțimea alternativelor. Numim *funcție de bunăstare socială* o funcție *F* care asociază fiecărui profil o ordine (ordinea „socială") pe mulțimea alternativelor Următoarele axiome par rezonabile pentru funcția *F:*

A.l : *F* este definită pentru orice profil.

A.2 : Dacă, pentru un profil dat, *Aj* este preferat față de A_k in raport cu ordinea *F,* această preferință se păstrează dacă profilul se modifică in felul următor :

a) ordinea relativă a alternativelor diferite de *Aj* nu se modifică;
b) in fiecare ordine individuală poziția lui *Aj se* îmbunătățește.

A.3 : Fie J/J o submulțime a mulțimii alternativelor *stf* = Mi..-Án}- Dacă un profil este modificat astfel incit să păstreze neschimbate ordinile relative ale elementelor din JJ/J, atunci ordinea socială *F* păstrează neschimbată ordinea relativă a elementelor din jjfj.

A.4 : Pentru orice pereche de alternative *Ajj* și Aj. există un profil pentru care ordinea socială *F* preferă pe *Aj* față de A_k.

A.5 : Nu există nici o persoană *i* astfel că, pentru orice *Aj* și A_t, ordinea socială să prefere pe *Aj* față de A_k, dacă *i* preferă pe *Aj* față de A_k (ordinea socială *F* nu este generată de preferințele unei singure persoane).

Arătați că axiomele lui Arrow A.l — A.5 sint inconsistente pentru n^.3 și *m* ^.2, folosind următoarele :

a) Pentru o ordine *F* dată, o coaliție de persoane S se numește *„decisivă* pentru perechea ordonată *(Aj, A_k)",* dacă din faptul că fiecare persoană din S preferă pe *Aj* față de A_{fc} rezultă că ordinea *F* preferă pe *Aj* față de A_k. *O* mulțime de persoane este *decisivă,* dacă ea este decisivă pentru cel puțin o pereche ordonată (Aj, A_k*).*

b) Fie *V* o mulțime decisivă minimală (adică *V* este decisivă, dar nici o submulțime proprie a lui V nu este decisivă). Atunci *V=j=0.*

c) Să presupunem că *V* este decisivă pentru perechea *(Aj,* Aj.). Fie ie *V* și fie *o* altă alternativă arbitrară. Atunci {i} este decisivă pentru (Aj, $A_{()}$ și deci, deoarece V este minimală, *V =*

d) Multimea (i) este decisivă pentru toate perechile, ceea ce contrazice A.5.

Aceasta înseamnă însă că

$$\{C/2 + B/2\}pA.$$

Nu pot însă să îmi imaginez nici un eveniment *C,* care să mă facă să prefer loteria *C + B* față de situația actuală a vieții mele. Prin urmare, spațiul utilităților mele este mărginit superior.

2. Să presupunem că spațiul utilităților mele nu este mărginit inferior. Fie *A* evenimentul că „nu se întîmplă nimic" și *B* evenimentul că „am cîștigat un milion de dolari". Dacă spațiul utilităților mele nu este mărginit inferior, trebuie să existe un eveniment *C* astfel ca

$$Ap\ \{0{,}9999995 + 0{,}000001\ C\}.$$

Nu pot însă concepe nici un astfel de eveniment C. Prin urmare, spațiul unităților mele este mărginit inferior.

3. Să presupunem, încă o dată, că spațiul utilităților nu este mărginit superior. Există atunci un șir de evenimente A_n *A2, ...,* astfel ca

$$. \ll (A_n) = 2^n.$$

Atunci loteria

$$\underset{n-1}{yj}\ 2^{-B}A$$

are utilitate infinită (paradoxul Petersburg). Pentru a evita acest paradox, spațiul utilităților trebuie să fie deci mărginit superior. Analog se poate argumenta că spațiul utilităților este mărginit inferior.

Acestea sînt argumentele lui Isbell pentru mărginirea utilității; se poate argumenta că faptul că o persoană nu poate concepe un eveniment *C* cu proprietățile descrise mai sus se datorește pur și simplu lipsei sale de imaginație, și că paradoxul Petersburg este tocmai un paradox. Problema rămîne desigur nerezolvată. Putem spune numai că, deși lucrurile s-ar simplifica în cazul utilităților mărginite, putem totuși să obținem majoritatea rezultatelor dorite fără a folosi această ipoteză.

pentru orice *q.* Un bun separabil este folosit în mod natural ca mijloc de schimb. în unele cazuri funcția <p este liniară; dacă aceasta este adevărat pentru funcțiile de utilitate a două persoane diferite, spunem că bunul *n* este *liniar transferabil* între cei doi jucători. I mportanța acestui caz constă în aceea că, dacă unitățile de utilitate pentru cele două persoane sînt alese în mod potrivit, atunci un transfer al acestui bun de la o persoană la cealaltă nu modifică utilitatea totală a celor două persoane. Celelalte *n—1* bunuri se pot împărți astfel încît să se maximizeze această utilitate totală; un transfer de bun *n (plată laterală)* este apoi folosit pentru a corecta orice inechitate cauzată de acest prim proces.

6.4. UTILITATE ABSOLUTĂ

în teoria economică a bunăstării sociale este uneori necesar să se aprecieze dacă o anumită acțiune „folosește unei persoane *a* mai mult decît ea dăunează unei persoane *b".* Aceasta nu se poate determina prin simpla măsurare a creșterii și descreșterii utilităților celor două persoane determinate de acțiunea dată, deoarece, după cum am menționat deja, unitățile scalelor utilității sînt arbitrare și deci nu pot fi utilizate pentru comparații între persoane. Dificultatea constă aici în faptul că nu există nici o scală absolută pe care să fie măsurate toate utilitățile.

Dacă însă spațiile utilităților (mulțimile valorilor funcțiilor de utilitate) diferitelor persoane sînt toate intervale mărginite, atunci se poate introduce o unitate absolută de utilitate, anume lungimea acestor intervale. Putem atunci norma toate aceste intervale, re- ducîndu-le printr-o transformare liniară la intervalul cu capetele 0 și 1. Este natural acum să comparăm utilitățile pe această scală absolută.

Problema se reduce deci la întrebarea dacă spațiul utilităților unei persoane este mărginit sau nu. Aceasta este o problemă deschisă. Isbell, pledînd pentru teza intervalelor mărginite, sugerează următoarele argumente :

1. Să presupunem că spațiul utilităților mele este nemărginit superior. Fie *A* evenimentul că ,,nu se întîmplă nimic" și *B* evenimentul constînd în aceea că ,,eu sînt fiert în

ulei". Fiindcă spațiul utilităților nu este mărginit superior, trebuie să existe un eveniment *C* astfel ca

$$u\,(\mathrm{C}) > 2u\,(A) - u\,(B).$$

care este o colecție fixă și nu o loterie. Dacă de exemplu q' constă din două automobile fără roți, q'' din cele zece roți aferente și $r = 1/2$, este evident că colecția q (un automobil cu roțile aferente) este preferabilă — cel puțin pentru majoritatea persoanelor — față de loteria $rq' + (1 - r)q''$.

O condiție pe care funcția de utilitate trebuie să o satisfacă este monotonia : dacă $q' > q$, trebuie să avem $u(q') > u\{q)$. De obicei, se presupune că funcția u este continuă și are derivate parțiale de ordinul întîi și doi continue (deoarece ea este monotonă, este garantată cel puțin continuitatea sa și existența derivatelor parțiale de ordinul întîi aproape peste tot).

Derivatele parțiale $du/dq_j = u_j$ se numesc *prețuri-umbră* (ele reprezintă prețul, exprimat în unități de utilitate, considerat „echitabil" pentru un anumit bun, în cadrul unei colecții date de bunuri).

Spunem că bunul *j* satisface *legea cîștigului diminuat* dacă, pentru orice *q,*

Se presupune că majoritatea bunurilor satisfac această lege.

Spunem că bunul *i* este *total(brut)-substituibil* pentru bunul *j,* dacă

$$\text{”}\,{}^{d}\!<h \qquad dqj \qquad ’$$

adică dacă o descreștere a cantității disponibile de bun *j* mărește prețul-umbră a bunului *i.* Deoarece în general $u_{ji} = w_o$-, total-sub- stituibilitatea este o relație simetrică.

Spunem că bunurile *i* și *j* sînt *complementare,* dacă

$$«« = {}_{w}.. > 0,$$

adică dacă creșterea cantității disponibile a unuia mărește

valoarea celuilalt.

Un bun, să zicem bunul *n,* se numește *separabil,* dacă utilitatea sa nu depinde de celelalte bunuri, adică dacă există funcțiile *w = = w(q₁,.. .,?„_!)* și = <p *(q„)* astfel ca

Am demonstrat astfel existența unei funcții de utilitate. Faptul că această funcție nu este unică nu are mare importanță; diferența între două funcții de utilitate constă doar în alegerea diferită a originii și a unității de măsură — o diferență asemănătoare de exemplu aceleia dintre scalele de temperatură Celsius și Fahrenheit.

Prin definiție funcția de utilitate u este liniară în raport cu evenimentele (proprietatea 6.2.7). Deoarece într-un experiment aleator (loterie) cu două rezultate posibile probabilitatea r a primului rezultat poate fi orice număr cuprins între 0 și 1, mulțimea valorilor funcției de utilitate este o submulțime convexă a dreptei reale, adică un interval. Există 11 tipuri de intervale, considerînd și mulțimea vidă ca și mulțimea constînd dintr-un singur element (care corespunde cazului trivial menționat mai sus al unei persoane indiferente față de orice alegere). Rămîn totuși nouă tipuri de intervale, și problema, în care din aceste tipuri se încadrează mulțimea utilităților pentru o persoană dată, rămîne deschisă.

6.3. COLECȚII DE BUNURI

Din punct de vedere abstract, se atașează utilități tuturor tipurilor de evenimente. Așa și trebuie să fie pentru ca jucătorii să poată distinge între toate tipurile de evenimente. Pe de altă parte, din punctul de vedere al economistului, aplicația naturală a teoriei utilității este îndreptată spre posesia de bunuri.

Să presupunem că există un număr finit n de bunuri principale, deținute de diferite persoane în cantități diferite. Să folosim un n-vector $q = \{q_{lf}.. .,q_n)$ pentru a nota cantitățile de bunuri deținute de o persoană (sau un grup de persoane). Un astfel de vector se numește *colecție de bunuri.* O asemenea colecție este considerată ca un eveniment, anume evenimentul care constă în deținerea acestei colecții. Mai departe, trebuie să definim acum o funcție de utilitate pe mulțimea colecțiilor de bunuri. Aici este necesară o precauție : trebuie să distingem între loteria

$$rq' + (1 - r) q'',$$

care dă colecția q' cu probabilitatea r sau colecția q'' cu probabilitatea $1 — r$, și respectiv colecția q definită prin

$$Qi = {}^{r}<li + (i - r)q'', \qquad j = 1,$$

și deci, conform cu (6.2.4),

$$\{rA + (1 — r)\, B\}\ i\ \{r\ [s^{\wedge} + (1 —\quad +$$
$$+ (1 - r)\, [s_2 B_x + (1 - s_2)\, B_o]\}.$$

De aceea

$$\{rA + (1 — r)\, B\}\ i\ \{[rs_x + (1 — r)\, sj^{\wedge}\text{-}l\text{-} + Ml — »i) + (1 — »') (1 — ^Mol\}$$

și, prin urmare,

$$u(rA + (1 — r)B) = rs_x + (1 — r)s_2,$$

sau, echivalent,

$$u\,(rA + (1 — r)\, B) = ru(A) + (1 — r)u\,(B).$$

în sfîrșit, trebuie să arătăm că u este unică în afară de o transformare liniară. Fie v o funcție arbitrară cu proprietățile (6.2.6) și (6.2.7). Deoarece $B_x p B_0$, trebuie să avem $®(B_X) > v(B_0)$ și deci putem defini

$$P = ®\ (B_o),$$

$$a = v\,(B_x) — v\,(B_o) > 0.$$

Să presupunem de exemplu că $B_x p A p B_0$. Dacă $u(A\sim) = s$, avem

$$A\ i\ \{sB_x + (1 — s)\ E_o\}.$$

și deci

$$v(A) = v(sE_1 + (1 — s)E_0),$$

$$v(A) = sv\,(B_x) + (1 - s)v\,(B_o),$$

$$i'(A) = s(a + 0) + (1 — s)0 = sa + 0,$$

$$fl(A) = au(A) + 0.$$

Analog se arată că (6.2.8) este verificată în celelalte patru cazuri (a, b, d, e) din (6.2.9).

Definim mai întîi w(£\) = 1 și $u(E_0) = 0$. Pentru un eveniment A arbitrar, $u(A)$ se definește după cum urmează, distingînd cele cinci cazuri. în cazul a) avem Ap£?$_x$p^$_0$. Conform axiomei de continuitate există r 6(0, 1) astfel ca

$$\{>'A + (1 - r)\ E_o\}\ \text{i}\ E_r$$

Definim atunci $u(A) = 1/r$. în cazul b) trebuie evident să definim $u(A) = 1$. în cazul c) există s e (0, 1) astfel ca

$$\{s\ E_{\pm} + (1 — s)E_0\}\ \text{i}\ A$$

și definim $u(A) = s$. în cazul d) trebuie evident să avem w(A) = 0. în sfîrșit, în cazul e) există t e (0,1) astfel ca

$$\{tA + (1 - t)\ EJ\ iE_0$$

și definim

$$u\ (\text{A}) = (\text{t} — 1)//.$$

Am definit astfel funcția w(A) pentru toate evenimentele A, și trebuie să arătăm că aceasta satisface condițiile (6.2.6) și (6.2.7). Demonstrația este destul de lungă, trebuind să distingem cele 25 cazuri care rezultă din cele cinci posibilități (6.2.9) pentru fiecare dintre evenimentele A și B. Vom face demonstrația pentru un singur caz, cînd A și B sînt ambele în cazul c); în celelalte cazuri demonstrațiile sînt asemănătoare.

Să presupunem că A și B sînt ambele în cazul c) și că w(A) = w(B) = s_2. Dacă $= s_2$, atunci se vede că A și B sînt ambele echivalente (în raport cu i) cu loteria $s_1E_1 + (1 — 8I)E_0$, și deci AiB. Dacă «i > s_2, se arată ca în demonstrația teoremei 6.2.3 că

$$\{\$\text{i}\ E| + (1 — SJEQ]\ \text{p}\ \{S.E. + (1 - S_2)E_0\}$$

și deci ApB. Analog se arată că BpA, dacă s_2 > ˢᵖ Prin urmare, funcția u satisface (6.2.6). Pentru a verifica (6.2.7), fie re(0, 1). Avem

și deci, în baza axiomei (6.2.5),

$$\{rA + (1 — r) B\} \text{ p } [\text{sA} + (1 — \text{s}) B\}.$$

Axiomele date sînt suficiente pentru construcția unei funcții de utilitate. Să distingem următoarele două cazuri. în primul caz persoana considerată este indiferentă față de orice alegere, adică *AiB* pentru orice evenimente *A* și *B.* Fără a discuta dacă o astfel de persoană există, să observăm că acesta este cazul trivial cînd toate evenimentele au pentru persoana considerată aceeași utilitate, caz neinteresant în cadrul teoriei jocurilor. Al doilea caz este tratat în demonstrația teoremei următoare. (Teorema este desigur valabilă în ambele cazuri.)

6.2.4. TEOREMĂ. *Există o funcție u cu valori reale, definită pe mulțimea tuturor evenimentelor, astfel ca*

$$u(A) > u(B), \text{ dacă și numai dacă } ApB, \qquad (6.2.6)$$

$$u(rA + (1 — r)B) = ru(A) + (1 — r)u(B), \qquad (6.2.7)$$

pentru orice evenimente A și B și orice r e [0, 1]. *Funcția u este unică, exceptând o transformare liniară, adică, dacă există o altă funcție v cu proprietățile* (6.2.6) *și* (6.2.7), *atunci există numerele reale* și [3 *astfel ca, pentru orice A,*

$$v(\text{A}) = \text{au}(\text{A}) + \text{p}. \qquad (6.2.8)$$

Demonstrație. Existența. Dacă AiB pentru orice A și *B,* putem pune u(A) = 0 pentru orice A. Să presupunem acum că există două evenimente $E_{\pm}$ și E_o, astfel încît $E \hat{} E_Q$. Conform axiomei 6.1.2, pentru fiecare eveniment A există cinci posibilități:

a) ApBj,
b) AiE_{lt}
c) $E \hat{} A\text{-}pEo,$ (6.2.9
d) $AiE_0,$

e) $B_o pA$.

Dacă *ApC,* atunci pentru orice *r* și orice *B*

$$\{rA + (1 - r)B\} \text{ p } \{rC + (1 - r) B\}. \qquad (6.2.5)$$

Să observăm că loteria *rA+(l—r)B* coincide cu evenimentul *A* pentru r=l și cu *B* pentru *r* = 0. Este rezonabil să admitem că o schimbare mică a lui *r* determină o modificare mică a utilității unei loterii (orice s-ar înțelege prin „utilitate a loteriei"). împreună cu teorema că o funcție reală continuă ia orice valoare dintre două valori ale sale, aceasta conduce la următoarea axiomă.

6.2.2. AXIOMĂ. *(Axioma continuității).* Fie *A, B, C* evenimente astfel ca ApCpB. Atunci există un *r e* [0,1] astfel încît

$$\{rA + (1 - r) B\} \text{ iC}.$$

Să observăm că în axioma 6.2.2 trebuie să avem de fapt *r e* (0, 1). într-adevăr, pentru *r* = 0 sau *r = 1* loteria coincide cu *B,* respectiv *A,* care, în baza ipotezei ApCpB, nu sînt echivalente (în raport cu relația i) cu *C.*

6.2.3. TEOREMĂ. *Dacă ApCpB și {rA* + (1 — *r)B}* i *C, atunci* 0 < *r* < 1; *în plus r este unic determinat.*

Demonstrație. Am văzut că *r* nu poate fi nici 0, nici 1. Pentru a arăta unicitatea sa, fie s un alt număr arbitrar din (0, 1). Să presupunem de exemplu *s <r.* Deoarece 0 < r — s < 1 — *s,* avem

$$B = \left\{ \frac{r - s}{1 - s} B + \frac{1 - r}{1 - s} B \right\}$$

și deoarece ApB, rezultă

Conform cu (6.2.2) — (6.2.3) avem însă

$$rA + (1 - r)\,B = sA + (1- s)\qquad A + -\text{^-}\,\text{BI}\ ,$$

$$1 - s \qquad 1 - s$$

idee este inaplicabilă. Vom arăta însă că se poate introduce și folosi un astfel de bun atîta timp cît nu încercăm să îl tratăm ca pe celelalte bunuri, care pot fi vîndute, cumpărate, transferate sau distruse.

6.2. LOTERII

Am văzut că unul dintre principalele cazuri în care am dori să dispunem de bunul ,,util"(bunul descris mai sus) este acela al asumării unui risc, adică al alegerii unei decizii în condiții de risc. Asumarea unui risc depinde în mod esențial de noțiunea de loterie.

6.2.1. DEFINIȚIE. Fie A și *B* două evenimente arbitrare și fie 0<r<l. Prin *rA* + (1— *r)B* vom înțelege *loteria* (experimentul aleator) ale cărei rezultate posibile sînt *A* și *B,* cu probabilitățile *r* și respectiv 1 — *r.*

în mod similar pot fi definite loterii cu trei sau mai multe rezultate posibile. Notăm că o loterie poate fi considerată, într-un anumit sens, tot ca un eveniment; pot exista loterii în care unul dintre rezultate este o altă loterie. Mai mult, combinațiile de evenimente (definite prin intermediul unei loterii) au proprietăți asemănătoare proprietăților algebrice elementare ale numerelor reale. Sînt verificate de exemplu următoarele axiome :

$$rA + (1 — r)\,B = (1 — r)\,B + rA, \qquad (6.2.1)$$

$$rA + (1 — r)\,\{sB + (1 — s)C\} = rA + (1 — r)sB + (1 — r)\,(1 — s)C, \qquad (6.2.2)$$

$$rA + (1 - r)A = A.$$

(6.2.3)

Axioma de comutativitate (6.2.1) are o semnificație evidentă. Axiomele (6.2.2) și (6.2.3), asemănătoare proprietății de distributivi- tate, arată că ordinea în care se desfășoară (sînt jucate) un șir de loterii nu are nici o importanță, importante fiind doar probabilitățile rezultatelor posibile.

Este evident că în loteria *rA + (l—r)B* evenimentul *A* trebuie să poată fi înlocuit prin orice eveniment *C* astfel ca *AiC. Avem* deci axiomele următoare :

Dacă AiC, atunci pentru orice *r* și orice *B*

{rA + (1 - r)A} i {rC + (1 - r) B}. (6.2.4)

6.1.2.2. *AiA* pentru orice *A.*

6.1.2.3. Dacă AiB, atunci *BiA.*

6.1.2.4. Dacă *AiB* și *BiC,* atunci AiC.

6.1.2.5. Dacă ApB și *BpC,* atunci *ApC.*

6.1.2.6. Dacă ApB și *BiC,* atunci .ApC.

6.1.2.7. Dacă AiB și *BpC,* atunci ApC.

Axioma 1 se mai numește legea *trihotomiei.* Axiomele 2, 3, 4 înseamnă că i este o relație de echivalență. Axioma 5 (împreună cu axioma 1) arată că p este o relație de ordine. în sfîrșit, axiomele 6 și 7 arată că p este tranzitivă în raport cu i.

în esență, axiomele 6.1.2 introduc o ordine liniară slabă în mulțimea evenimentelor, ordonîndu-le de la „cel mai preferabil" pînă la „cel mai puțin preferabil". Se obișnuiește să se spună că, dacă cineva preferă evenimentul A față de evenimentul *B,* atunci evenimentul A are *utilitate* mai mare decît *B,* sau, echivalent, utilitatea lui A este mai mare decît aceea a lui *B.*

Din păcate, afirmația că utilitatea lui A este mai mare decît aceea a lui *B* nu spune cît de mare este diferența dintre aceste utilități. Pentru unele probleme aceasta nu reprezintă nici o dificultate (de exemplu, în problema determinării evenimentului pe care îl alege o persoană). Pe

de altă parte, dacă alegerea implică un risc, trebuie să cunoaștem ceva despre diferența dintre utilitățile a două evenimente date (și nu numai care dintre ele este preferat). Dacă de exemplu o persoană trebuie să aleagă între evenimentul *B* și o *loterie*',* ale cărei rezultate sînt evenimentele A sau *C* (fiecare cu probabilitatea 1/2), și dacă ApBpC, problema este de a stabili dacă posibilitatea unui cîștig (în cazul în care rezultatul loteriei este A) este suficientă pentru a compensa riscul unei pierderi (dacă rezultatul loteriei este C).

Toate dificultățile ar dispărea, dacă ar exista un bun (numit, să zicem, *util),* a cărui utilitate să fie liniară (adică utilitatea unei anumite cantități din acest bun să fie direct proporțională cu cantitatea respectivă). Am putea atunci pur și simplu să determinăm mărimea (în unități ale acestui bun) plăților marginale, care l-ar determina pe jucător să renunțe la A pentru *B,* și respectiv la *B* pentru *C,* acționînd apoi în consecință. Am văzut însă că, din păcate, nici un bun (nici chiai' banii) nu are această proprietate, astfel că această

*> Termenul *loterie* este folosit cu semnificația de *experiment aleator. (N. T.)*

TEORIA UTILITĂȚII

6.1. UTILITATE ORDINALĂ

în cele patru capitole precedente am presupus întotdeauna că doi jucători au interese direct opuse. Chiar dacă cei doi jucători formează un sistem închis, în care unul pierde ori de cîte ori celălalt cîștigă, nu este evident că interesele lor vor fi întotdeauna direct opuse. Astfel, dacă unul dintre jucători este un bogat filantrop, iar celălalt un om sărac dar merituos, se poate întîmpla ca primul jucător să prefere să îl lase pe al doilea să cîștige (pînă la o anumită limită). Ceea ce trebuie luat în considerare într-un asemenea caz nu sînt banii în sine, ci utilitatea pe care ei o reprezintă. De asemenea riscurile asumate într-un joc nu pot fi întotdeauna exprimate în bani. Rațiuni nebănești (de

exemplu morale, sentimentale) pot face cîștigul unui joc foarte important pentru un jucător, dar lipsit practic de importanță pentru altul. Vom studia acest concept de valoare individuală (personală) sau utilitate individuală.

Să considerăm situația că o persoană *preferă* anumite evenimente în raport cu altele, sau este *indiferentă* față de două evenimente date. Avem deci două relații ,,p" și „i", definite pe produsul mulțimii evenimentelor cu ea însăși. Notăm evenimentele cu *A, B, C* etc.

6.1.1. DEFINIȚIE. Pentru orice evenimente *A* și *B* scriem ApB, dacă *A* este preferabil în raport cu *B,* și *AiB,* dacă *A/B* și *B/A (A/B* reprezintă negația lui *ApB).*

6.1.2. AXIOMELE UTILITĂȚII. Relațiile ,,p" și „i" satisfac următoarele axiome :

6.1.2.1. Pentru oricare două evenimente *A* și *B* are loc una și numai una dintre următoarele relații:

a) ApB 0) *BpA* y) *AiB*

5. Pare cit se poate de plauzibil că orice joc diferențial cu cîștig integral sau continuu are o soluție optimă în strategii pure, exceptînd eventual mulțimi de dimensiune inferioară (suprafețe singulare). Arătați că această afirmație este falsă.

Considerați pentru aceasta jocul in semiplanul y^aO, cu suprafața terminală $y = 0$, cîștigul integral Jx di și ecuațiile cinematice

$$i = (+ - ?)^2 > y = - 1,$$

unde <p și ip aparțin intervalului [0, 1], Arătați că, pentru orice punct inițial (x_0, y_0), valorile jocului pentru strategii pure verifică inegalitățile

"i < ^{x}*o Ut*» "Ii > *o!/o + yo/8.

Prin urinare, jocul nu posedă nici o soluție optimă in strategii pure,dacă $y_0 > 0$ (și, de asemenea, nu are traiectorii optime).

6. Să considerăm un joc diferențial care arc numai două rezultate posibile, să zicem „cîștig" sau „pierdere" (pentru jucătorul I). Ne putem deci închipui suprafața terminală

ca Împărțită in două mulțimi și separate printr-o varietate (n — ^-dimensională jf. Jucătorul I încearcă să determine ca jocul să se termine într-un punct din iar II într-un punct din <£.

în general spațiul de joc fi" se va împărți în două regiuni, numite respectiv zona de cîștig (WZ) și zona de pierdere (LZ), astfel că jucătorul I poate să forțeze terminarea jocului in *"Wt* dacă jocul pornește dintr-un punct din WZ, și jucătorul II poate să forțeze terminarea jocului în <£,

dacă jocul pornește dintr-un punct din LZ. Aceste două regiuni sînt în general separate de o suprafață a cărei intersecție cu suprafața terminală este Jf.

a) în ipoteza cădește netedă, arătați că vectorul v = (v_p ..v„) normal la (și orientat spre WZ) satisface ecuația :

$$\max \min_{\mathbf{9}} S \, fi \, (x, <p, ip) = 0.$$

Obțineți astfel pentru aceste jocuri un sistem de ecuații de traiectorie asemănător cu (5.5.12).

b) Să considerăm următorul joc : jucătorii I și II comandă mișcarea a două puncte, *P* și respectiv *E,* in semiplanul superior din fi^2. Cele două puncte se pot mișca în orice direcție cu vitezele 1 și respectiv U><1. Jocul este cîștigat de jucătorul I, dacă distanța dintre *P* și *E* ajunge mai mică decît *d,* și este pierdut de I, dacă *E* atinge dreapta *y* = 0.

c) Determinați ecuațiile cinematice ale acestui joc, notînd *(x_v yj* și (x_2, y_2) coordonatele lui *P* și respectiv *E,* și <p, variabilele de comandă ; caracterizați mulțimea .

d) Rezolvați acest joc.

Folosiți pentru aceasta jocul recursiv cu următoarele două elemente :

^ = (-10), r_2

2. Extindeți rezultatele obținute pentru jocurile recursive la jocurile in care se acordă un clștig In fiecare etapă, chiar dacă jocul se prelungește nelimitat.

a) Se numește *„capcană" o* mulțime de elemente de joc cu proprietatea că, dacă jocul ajunge la un moment dat intr-un element al acesteia, atunci unul dintre jucători poate să il determine să rămlnă in continuare in capcană, să acumuleze ciștiguri și să realizeze un ciștig mediu total infinit. Arătați că jocul cu următoarele trei elemente :

10

10

are capcane și că pentru acest joc aplicația (5.3.7), care definește valorile jocului, nu are nici un punct fix.

b) Orice joc fără capcană și in care toate clștigurile sint nenegative are valoare.

c) Un joc fără capcane, in care există ciștiguri atit pozitive cit și negative, nu are in mod necesar valoare. Construiți un exemplu. („Valoarea" trebuie să oscileze pentru „cele mai bune" strategii.)

dacă ecuația funcțională (5.3.7) are soluție elementul unic

3. Arătați că un joc recursiv cu timp continuu nu posedă Întotdeauna valoare, chiar unică. Considerați pentru aceasta jocul cu

-1

jucat în decursul unui anumit interval de timp și apoi terminat. Cu alte cuvinte, fiecare jucător alege un moment pentru a acționa; pină in acest moment el folosește în permanență a treia sa strategie pură.

4. Studiul jocurilor diferențiale include, pe lingă ecuațiile traiectoriei (5.5.12), și studiul așa-numitelor suprafețe singulare. Să considerăm jocul In semiplanul p/>0 cu suprafața terminală p = 0, ciștigul terminal

$$G(x^*) = 1/(1 + x^{*2})$$

ți ecuațiile cinematice unde variabilele de control <p și iau valori din intervalul [0, 1]. Arătați că axa *Oy* este o suprafață singulară In sensul că traiectoriile optime slnt curbe care pornesc din puncte ale axei Op. Ce

trebuie făcut Intr-un punct al axei Op (unde se lntllnesc două traiectorii **optime) ?**

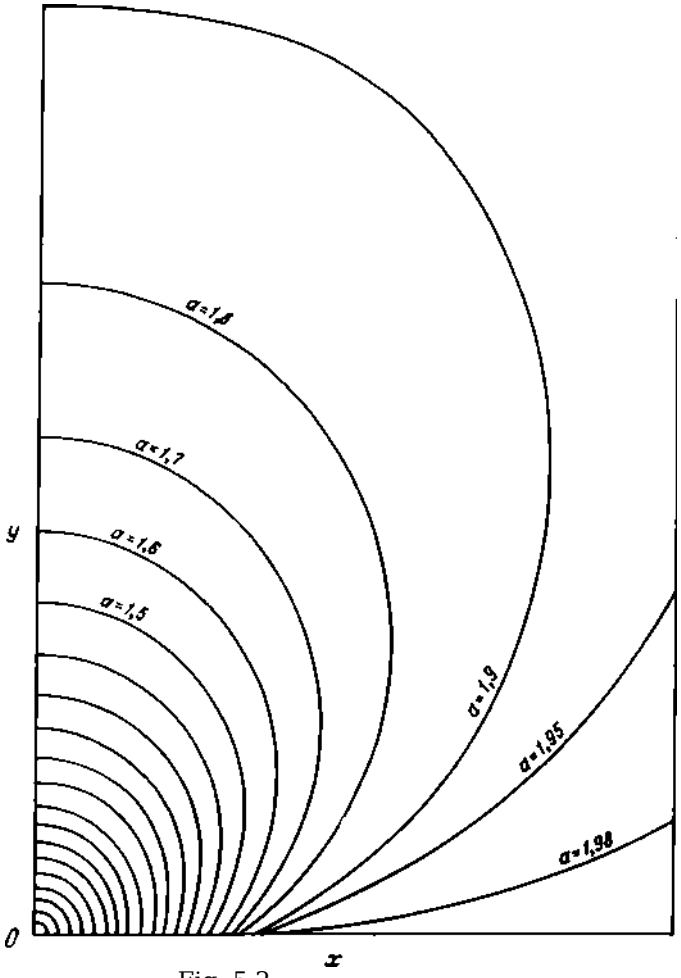


Fig. 5.2.

PROBLEME

1. Arătați că lntr-un joc recursiv vectorul valorilor nu este definit univoc de (5.3.7), și, in afară de aceasta, metoda aproximațiilor sucesive, folosită pentru jocurile stochastice, nu converge In mod necesar către vectorul valorilor.

de unde, ținînd seama că V_2 este constantă de-a lungul oricărei traiectorii optime, obținem

$$\frac{dtf}{dx} \frac{V_2(Q)}{V'_x}$$

Deoarece $V_2(0)$ este dat și Fj se poate exprima ca funcție de *x,* această ecuație devine

dj/ dx

cu soluția

$$C_3 - \sqrt{\frac{16\,a^2}{16 - a^4}}$$

din care pentru $y = 0$, $x = a$ se obține C_3. Bezultă

$$y = \frac{\pm\, f\, 16\, a^2 - 16\, x^2 + a^4\, x^2}{P16 - a^4}$$

sau, echivalent,

$$x^2 + \left(y - \frac{a^2}{\sqrt{16 - a^4}}\right)^2 \quad \frac{16\, a^2}{16 - a^4} \qquad (5.5.2$$

Traiectoria optimă este deci un cerc cu centrul pe axa *Oy* (fig. 5.2). Valoarea *V(x, y) se* poate găsi rezolvînd (5.5.21) în raport cu *a* și apoi (5.5.20) în raport cu $_T$; se obține $V(x, y) = r + a^2/8$. Se pot determina și strategiile optime, adică direcțiile vitezelor imprimate de cei doi jucători; acestea sînt ambele tangente la cercul (5.5.21) și îndreptate în sus (în sensul îndepărtării de axa *Ox)* pentru jucătorul I (cel care maximizează), și respectiv în jos (spre axa *Ox)* pentru jucătorul II.

Dacă folosim timpul invers - = T — t, ecuațiile

traiectoriei devin y_x = -1/®, y_2 = o, x = y = x*v_2,

unde $\dot{y}_x$ reprezintă derivata lui y_x în raport cu τ etc.

La acest sistem se adaugă condițiile inițiale : pentru τ = 0 avem

$$x = x_0,\ y = 0,$$

$$y_x = x_o li,\ V_2 = \text{fl/a}^{\wedge} — x\%/16.$$

Din aceste condiții rezultă că x_0 2, adică nici o traiectorie nu se termină într-un punct cu x_0 >2.

Derivata lui V_1 în raport cu τ este

$$\frac{ro}{X^2} = - *=F_x. \qquad IO$$

Această ecuație are soluția

$$Vi — (| e^{T} + C_2 e$$

de unde rezultă

$$-C_{ie}{}^{T}$$

Notînd $x_0 = a$ și determinînd C_x și C_2 din condițiile inițiale, se obține

$$(4 + a^2)\, e^{-T} + (4 — a^2)\, e' \qquad (5.5.2$$

iar

Pentru a determina pe *y,* să observăm că și cîștigul

$$\frac{\mathring{y}}{\mathring{x}} = \frac{V_2}{V_1}$$

(di + a^/8. •'o

Avem deci *K (x, y)* = 1 pentru orice *x* și *y.*

Este evident că, dacă *u >w,* atunci jucătorul I poate să prelungească jocul în mod nelimitat. De aceea vom lua în considerare numai punctele din cadranul pozitiv.

Ecuația fundamentală a acestui joc este

$y(V_1 \cos 9 + V_2 \sin 9) + (x + y)(V_x \cos Ț + V_2 \sin <0 = -1.$

(5.5.14)

Primul termen al expresiei din membrul întîi este maxim

$$\sin 9 \qquad \frac{Vt}{k\,H + vi} \qquad (5.5.1$$

pentru

$$\cos 9 = \qquad (5.5.1$$

iar al doilea termen este minim pentru

$$\cos = -\cos 9, \qquad (5.5.17)$$

$$\sin \hat{} = -\sin 9.$$

înlocuind aceste valori în (5.5.14), se obține după simplificare

$$]/Vl + Vl = llx.$$

(5.5.19)

Avem evident

$$fu = \cos tp, \quad f_{12} = \cos 9\ "I^{-} \cos ij^{*},$$

$$fu = \sin <|/, \quad f_{22} = \sin 9 + \sin (|>,$$

și folosind formulele (5.5.15) — (5.5.19), obținem ecuațiile traiectoriei

$$\text{Vi} = 1/x, \; y_2 = 0, \; £ - — x^2 \; V_{lf} \; y = — x^2 V_2.$$

are în acest punct, astfel că

$$d\hat{}_k/dx_j = 0.$$

Termenul (5.5.9) este, prin urmare, nul. Analog, termenul (5.5.10) este nul. Considerăm acum termenul (5.5.8). Avem

$$\frac{dvi}{d\,Xj}\,\frac{\mathbf{a^a v}}{dx_i}\,\frac{_^{dv}i}{dij\ dx_i}$$

și, prin urmare,

$$\frac{\mathbf{dV_j}}{\mathbf{d}\ell}. \qquad (5.5.11)$$

Folosim notația *y.* pentru partea dreaptă a acestei ecuații. Anulînd suma expresiilor (5.5.7) și (5.5.8), obținem ecuațiile

$$Vi = -\,[K_s\,(x;\qquad) + \mathrm{E}\ Vi\ fu\ (^x;\qquad)1, \qquad (5.5.12)$$

care împreună cu sistemul

$$^x i = fi\ (^x, \qquad (5.5.13)$$

sînt denumite *ecuațiile traiectoriei* jocului diferențial. Aceste *2n* ecuații împreună cu valoarea funcției *G* drept condiție finală reprezintă soluția formală a jocului.

Uneori este mai comod să folosim timpul invers $_{\mathrm{T}} = T - t$ în locul timpului direct *t* [deoarece pentru sistemul (5.5.12) —(5.5.13) avem date condiții finale în loc de condiții inițiale].

5.5.1. Exemplu. Jucătorii I și II comandă mișcarea unui punct în planul euclidian, fiecare imprimîndu-i o viteză, a cărei mărime depinde de poziția punctului și a cărei direcție este la dispoziția jucătorilor. Viteza rezultantă a punctului este suma acestor două viteze. Jocul se termină cînd punctul atinge axa *Ox.* Cîștigul este suma dintre durata jocului și mărimea *xl/8,* unde x_0 este abscisa punctului în care jocul se termină.

Dacă $u = y$ și $w = x + y$ sînt mărimile vitezelor alese respectiv de jucătorii I și II, obținem ecuațiile cinematice

$£ = y \cos <\mathrm{p} + \{x\text{-}|\text{-}y) \operatorname{costp},\ y = y \sin <\mathrm{p} + (x\text{-}|\text{-}y) \sin$

Ecuația (5.5.5) sau cea echivalentă (5.5.6) se numește *ecuație fundamentală.* în (5.5.6) se poate în general schimba ordinea operatorilor max și min, deși în practică se pot întîlni mulțimi de dimensiune mai mică pentru care acest lucru nu este adevărat *(suprafețe singulare).* De aceea strategiile pure sînt în general suficiente; o randomizare este necesară numai într-un număr finit de puncte în fiecare partidă a jocului.

Ecuațiile traiectoriei. După obținerea ecuației fundamentale (5.5.5), se poate determina soluția jocului printr-o mișcare în sens invers (ca și în jocurile pînă la ruinare) pe traiectoria definită de ecuațiile cinematice, pornind de pe suprafața terminală. Pornind de la ecuația fundamentală

$$K + \text{I VJ.} = 0$$

și derivînd membrul întîi în raport cu x_s, obținem o sumă formată din următorii termeni:

$$+ \text{S } V_i < f_v \tag{5.5.7}$$

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} f_i,$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(K + \sum_i V_i f_i \right) \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x_j}$$

$$\sum_{l=1}^{q} \frac{\partial}{\partial \psi_l} \left(K + \sum_i V_i f_i \right) \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}$$

unde $K_s = dK_t dX_j$ și $f_{ij} = dffdxf)$,
Să considerăm termenul (5.5.9), în ipoteza că variabilele de control <p_t sînt mărginite. poate fi un punct interior sau una dintre marginile intervalului dat. Dacă este un punct interior, atunci (5.5.8)

deoarece ? a fost ales astfel încît să maximizeze expresia din paranteză. Pe de altă parte, dacă este una dintre

(5.5.1

marginile intervalului, atunci (exceptînd punctele de singularitate) va rămîne în conținu- de recurență pentru aceste valori. (Aceste ecuații sînt aici ecuații diferențiale.)

Să presupunem acum că aceste valori există; notăm $V(x_{lf}.. .,x_n)$ valoarea jocului care începe în punctul $x=(x_v. ..,x_„)$. *Să* presupunem că în momentul $t = 0$ jucătorul I alege controlul 9, iar II alege controlul Atunci după intervalul de timp At suficient de mic, variabilele de stare sînt aproximativ x + A®, unde

$$A®, = fi(x-, 9, AL \qquad (5.5.3)$$

Dacă jocul are un cîștig integral, atunci cîștigul total în acest interval de timp este aproximativ

$$K(«i,..., o>„)AL \qquad (5.5.4)$$

Jocul reîncepe din punctul x + A®, definit prin (5.5.3), și avînd deja obținut cîștigul (5.5.4). Dacă începînd din momentul At se folosesc în continuare strategii optime, atunci cîștigul total este

$$K(x_{lf}.. .,x_n)At + F(a?+Aa?).$$

Știm însă că

$$V(x + A®) « V(x) 4- £ V_i(x)ăx_i$$

(unde $V_{ţ}$ desemnează derivata parțială a lui V în raport cu $x_}$), adică

$$y(®+A;r) ss V(®) + S V_{ţ}(x)f_t(x; 9, Ţ) At.$$

Dacă în momentul t = 0 variabilele de control 9 și au fost alese în mod optim, atunci avem

$$V(x) « K(x)bt + V(x) + £ PX®) fit® î \quad î) At,$$

și la limită pentru At -> 0 se obține

$$-K(®) + S Vi (#).£ (®J9, (p = o, \qquad (5.5.5)$$

sau echivalent

$$\max \min \{\hat{}(\circledR) + £\ V\hat{}x)\hat{}\ (x_{\ell},\ 9,\ i\text{ț})\} = 0. \qquad (5.5.6$$

•P 4, fiecare moment. Deoarece mișcările se efectuează în mod continuu, este natural să considerăm că elementele de joc (situațiile) nu se modifică prea mult în decursul unui interval mic de timp, deci elementul de joc se modifică în mod continuu. Dacă elementul de joc este reprezentat printr-un punct al spațiului euclidian de o anumită dimensiune, atunci strategiile pot fi în general considerate că definesc legea diferențială de mișcare a acestui punct (element de joc).

Definiția exactă este următoarea. Un element de joc este reprezentat de un sistem de *n* numere reale (aj_{n}.. .,x_{n}), numite *coordonate de stare.* In fiecare moment *t* jucătorul I alege un sistem de *p* numere reale, <p = (<p_1,. . .,tp„), care trebuie să satisfacă în general unele restricții de forma <p< "C unde și b_i sînt constante date. Analog, jucătorul II alege în fiecare moment un *q*-vector = ($\hat{}_{n}$.. .,+«)• Vectorii cp și se numesc *variabile de control (comandă).* Variabilele de control influențează modificarea variabilelor de stare prin intermediul unui sistem de ecuații diferențiale *(ecuații cinematice)*

$$= fi\ \&\ ;\ o,\ i = l,\ldots,n, \qquad (5.5.1)$$

unde *Jbi* reprezintă derivata la dreapta a lui în raport cu timpul. Jocul diferențial se termină, cînd vectorul variabilelor de stare atinge frontiera (numită *suprafață terminală)* unei mulțimi închise date *C* a spațiului n-dimensional. în aplicații practice aceasta poate să însemne de exemplu că jucătorul I este suficient de aproape de adversarul său II, încît îl poate captura, sau că s-a terminat un interval de timp dat (dacă un joc trebuie să se termine după un interval de timp dat, atunci timpul este desigur una dintre variabilele de stare). Cîștigul poate avea diferite forme, cele mai des folosite fiind *cîștigul terminal* sau *integral,* sau o combinație a acestora. Dacă jocul începe în momentul t=0 și se termină în momentul $t = T$ în punetul $(y_{v}.. .,y_{„}),$ atunci cîștigul terminal este o funcție $G(y_{v}.. .,y_{„}),$

definită pe suprafața terminală a jocului, iar cîștigul integral este de forma

$$\int K(a?j,\ldots, x_n)dt. \qquad (5.5.2)$$

Forma cea mai generală a cîștigului considerată aici este suma lui G și a integralei (5.5.2).

Ecuația fundamentală. Ca și în cazul jocurilor în mai multe etape discrete, metoda de rezolvare a jocurilor diferențiale constă în înlocuirea elementelor de joc prin valorile lor și rezolvarea ecuațiilor

Acest joc recursiv poate fi reprezentat printr-un singur element de joc T. Strategiile în T corespund pur și simplu partițiilor forțelor între apărare și atac. Blotto are deci patru strategii, corespunzătoare afectării a 0,1, 2, 3 unități pentru atac, în timp ce adversarul dispune în mod corespunzător de trei strategii. Matricea jocului are forma

/r r **u**
r r
r î
U -i

(5.4.8)

Se arată cu ușurință că valoarea jocului este 4-1 și strategiile e-optime ale colonelului Blotto sînt de formă (0,1 — *8 — 8*^{2}*, 8,* 3^2). Cu cît 3 este mai mic, cu atît este mai mare probabilitatea ca Blotto să obțină victoria, dar cu atît mai mare este valoarea medie a lungimii jocului. Răbdarea lui este deci de importanță capitală. Pe de altă parte, pentru 8 = 0 jocul se prelungește nelimitat. Astfel, colonelul Blotto nu posedă nici o strategie optimă.

5.4.3. GENERALIZĂRI. Se pot obține generalizări ale jocurilor recursive și stohastice în diferite moduri. O posibilitate este de a permite cîștiguri chiar în cazul în care un joc recursiv nu se termină. Dificultatea constă desigur în aceea că în unele situații poate să nu existe valoarea medie a cîștigului, deoarece seria corespunzătoare este divergentă. Dacă această serie tinde către 4- oo sau — oo, această limită se poate încă lua ca valoare a jocului. Dacă

însă seria este oscilantă, atunci valoarea jocului nu poate fi definită în nici un mod satisfăcător.

O altă posibilitate constă în a permite ca elementele de joc r_{fc} să aibă un număr infinit de strategii pure. r_{fc} poate fi de exemplu un joc pe pătratul unitate sau chiar un joc de un tip mai complicat. Everett [5.6] a arătat că, în condiții rezonabile, aceste jocuri posedă valoare și strategii s-optime; aceste strategii e-optime pot fi însă nestaționare.

5.5. JOCURI DIFERENȚIALE

O altă extensie a jocurilor stohastice și recursive este reprezentată de jocurile în care, durata fiecărei etape descrescînd către 0, se obține la limită un joc în care fiecare jucător efectuează o mișcare în unde $B_k = (b\$)$ și

$$b'tj = q*? \; a\hat{}j + \text{X gti } v,. \qquad (5.4.7)$$
$$1=1$$

Aceste relații au întotdeauna o soluție, dai' ea nu este în general unică. într-adevăr, funcția

$$f\, v_2, \qquad v,) = (\text{val } \ldots, \text{val } B_p)$$

este continuă (verifică condiția Lipschitz cu constanta 1). Se arată apoi că, dacă toți v_k aparțin intervalului

$$[\text{mina-}), \max_{[i.k\,i,j,k} a[\}],$$

atunci toți $b\hat{}$, și deci și valoarea jocului cu matricea B_k, aparțin aceluiași interval. Conform teoremei de punct fix al lui Brouwer există deci un vector v astfel încît $f(v) = v$. Este posibil desigur să existe mai mulți astfel de vectori. în numeroase aplicații interesante v este însă unic determinat. în general, vectorul valorilor este vectorul cel mai apropiat într-un anumit sens de numărul a_x. (Pentru o expunere mai exactă și demonstrațiile respective vezi [5.6] sau [5.10]). Să

notăm în sfîrșit faptul că strategii optime nu există în mod necesar, ci pot exista numai strategii e-optime. Pentru e-»0 este posibil ca valoarea medie a lungimii jocului să crească nemărginit; prin urmare, valoarea medie a cîștigului are o discontinuitate, deoarece prin apropierea de strategia limită cîștigul variază de la v la a_x.

Pentru a ilustra cîteva dintre dificultățile enumerate, să considerăm următorul exemplu (v. [5.6]), care este o variantă a așa-numitului *joc Blotto.*

5.4.2. Exemplu. Colonelul Blotto dispune de trei unități și urmărește să ocupe un avanpost inamic, apărat de două unități. Totodată el trebuie să evite ca inamicul să ocupe propriile sale poziții în timp ce el atacă avanpostul. Pentru a obține succesul un atacant are nevoie de o unitate mai mult decît apărătorii; dacă atacantul nu este suficient de puternic, atunci el se retrage pe pozițiile sale și jocul se repetă în ziua următoare. Cîștigul este egal cu -ț-1. dacă Blotto ocupă avanpostul inamic fără a pierde propriile poziții, și egal cu —1, dacă inamicul ocupă pozițiile lui Blotto. Cîștigul se presupune nul în cazul unui joc infinit.

Principala dificultate a acestor jocuri constă în aceea că, spre deosebire de jocurile stochastice, jocurile recursive nu pot fi aproximate prin jocurile sale trunchiate (adică obținute prin întreruperea jocului dat după o anumită etapă). într-adevăr, deoarece jocul se poate prelungi în mod nelimitat cu o probabilitate pozitivă, nu există nici un r astfel ca efectul întreruperii jocului după r etape să poată fi neglijat. în afară de aceasta, deoarece condiția (5.3.3) se înlocuiește prin condiția mai slabă

$$\sum_{l=1} q_{ij}^{kl} \leqslant 1 \tag{5.4.1}$$

sistemul de condiții corespunzător condițiilor (5.3.7) și (5.3.8) nu are neapărat soluție unică, iar șirul de vectori v^T definit ca în teorema 5.3.3 nu converge în mod necesar către adevărata valoare a jocului. Să considerăm drept exemplu un joc recursiv cu un singur element de joc

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.4.2}$$

Este evident că toate valorile p^1, v^2 etc. sînt egale cu v°, dacă se pornește cu —1, și sînt egale cu —1, dacă se pornește cu v° —1. Prin urmare, deși șirul valorilor converge, el nu converge în mod necesar către adevărata valoare a jocului, egală evident cu cel mai mare dintre numerele a_x și —1.

Definiția exactă este următoarea : un *joc recursiv* constă dintr-o mulțime finită de elemente de joc r_k, reprezentate prin matricele A_k, ale căror elemente sînt de forma

$$a_{ij}^k = q_{ij}^{k0} a_{ij}^k + \sum_{l=1} q_{ij}^{kl} \Gamma_l, \tag{5.4.3}$$

unde verifică condițiile

$$\sum_{l=0} q_{ij}^{kl} = 1$$

$$q_{ij}^{kl} \geqslant$$

(5.4.4) (5.4.5)

Să considerăm relațiile

Obținem

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2{,}72 & -1 \\ -1 & 0{,}91 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0{,}84 \end{pmatrix}$$

$$B_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1{,}87 \\ -1{,}87 & 0{,}72 \end{pmatrix}$$

Aceste jocuri matriceale $\begin{pmatrix} 1 & 2{,}10 \\ -2{,}10 & 1 \end{pmatrix}$ ate[illegible]e optime

$x^1 = (0{,}34 ; 0{,}66)$, $y^1 = (0{,}34; 0{,}66)$,
$x^2 = (0{,}38 ; 0{,}62)$, $y^2 = (0{,}38 ; 0{,}62)$,
$x^3 = (0{,}40 ; 0{,}60)$, y^3 - (0,40 ; 0,60),
$x^4 = (0{,}50 ; 0{,}50)$, $y^4 = (0{,}50; 0{,}50)$,

care aproximează strategiile optime (staționare) ale jocului stochastic.

B
$<$

5.4. JOCURI RECURSIVE

Jocurile recursive sînt asemănătoare jocurilor de ruinare și jocurilor stochastice, dar prezintă cîteva dificultăți suplimentare. Ca și în jocurile stochastice, diversele elemente de joc (situații, poziții) se pot repeta. Ca și în jocurile de ruinare, probabilitatea ca jocul să se termine după o anumită etapă poate să fie nulă. Aceste două fapte fac posibil, cu o probabilitate pozitivă, ca jocul să se prelungească nedefinit. Pentru a asigura jocului o valoare finită, se convine de obicei ca cîștigul să se plătească numai la sfîrșitul jocului. Este de asemenea posibil să se definească un cîștig în cazul unei partide nelimitate.

5.3.4. Exemplu. Jucătorii I și II posedă împreună cinci

unități, în fiecare etapă a jocului, fiecare jucător alege „stema”sau,,banul”, fără a cunoaște alegerea celuilalt jucător. Dacă rezultatele coincid, atunci jucătorul II plătește jucătorului I trei unități sau o unitate, după cum a fost aleasă stema sau banul. Dacă rezultatele sînt diferite, atunci jucătorul I plătește două unități lui II. După fiecare etapă se decide, prin aruncarea unei monede, dacă jocul este continuat sau se termină; jocul se mai termină atunci cînd un jucător este ruinat (presupunem că un jucător nu poate plăti mai mult decît posedă).

Acest joc poate fi reprezentat prin patru situații (elemente de joc) Tj., unde *k* este suma (numărul de unități) pe care jucătorul I o posedă la începutul etapei respective. Anume :

$$r_{_}/3 + r_4/2 \qquad (5.3.$$

$$^{1}\text{l-i} \qquad 1 + \text{IW2 }) \qquad 16)$$

$$r_{\text{?}} = \begin{pmatrix} 3 & —2 \\ 1\text{-}2 & 1 + r_3/2 \end{pmatrix} \bullet \qquad (5.3.17)$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} ^{2} & -2 + \text{I}\backslash/2\backslash \\ 1\text{-}2 + r_1/2 & 1 + W' \end{bmatrix} \qquad (5.3.18)$$

$$r_{„} = \begin{bmatrix} ^{1} & —2 + r_2/2)\backslash \\ 1—2+ r_2/2 & \text{i} \quad r \end{bmatrix} \qquad (5.3.19)$$

Folosind formulele de recurență (5.3.10) — (5.3.12), obținem primele aproximații ale vectorului valorilor

$$= (0, 0, 0, 0),$$

$$\text{ai} = \quad -0{,}13 \quad - \quad -0{,}5),$$

$$(0{,}22 \quad 0{,}20$$

$$v^2 = \quad -0{,}19 \quad - \quad -$$

$$(0{,}26; \quad ; \quad 0{,}29; \quad 0{,}53)$$

$$v^3 = \quad - \quad - \quad —$$

$$(0{,}26 : \quad 0{,}19; \quad 0{,}31; \quad 0{,}55)$$

$$0^4 = \quad -0{,}19 \quad -0{,}32 \quad -$$

$$(0{,}26 : \quad . \quad . \quad 0{,}55)$$

®[4] este deja o aproximație cu două zecimale exacte. Putem folosi acum r[4] pentru a determina strategiile optime ale tuturor situațiilor. Deoarece mulțimile de indici *k, i, j* sînt finite, din (5.3.3) rezultă s<l. Notînd

$$t_r = \max_{\mathbf{jt}} \{K^{+1} - ®I|\},$$

se arată ușor (folosind lema 5.3.2) că $Z_r<st_{r_x}$ și de aici rezultă $t_r<s^T t_0$. Șirul de vectori v^r este deci un șir Cauchy și, prin urmare, converge către o limită *v.* Punînd

$$w_k = \text{val } B_k = \text{val } (b\hat{}),$$ unde
$$bi> = a^k u + S \text{ gîh },$$

se vede că $w_k = v_k$ pentru orice *k.* într-adevăr, pentru orice e > 0 se poate alege *r* suficient de mare, astfel incit să avem

$$i - v_k | < s/2, \qquad (5.3.14)$$

$$K^{+1} - î\backslash l < e/2 \qquad (5.3.15)$$

pentru orice *k.* Din (5.3.14) și lema 5.3.2 rezultă că $|v^{*+1}—w_{fc}|<$ e/2 pentru orice *k* ; împreună cu (5.3.15) aceasta înseamnă că pentru orice *k* avem

$$I w^* - v_k | < e$$

și, deoarece s este arbitrar, avem $v_k = w_k$.

Partea a doua a teoremei 5.3.3 este constructivă și dă astfel posibilitatea aproximării suficient de bune a valorilor „elementelor de joc" r_{fc}. Dacă convenim ca jocul să fie continuat ca joc stochastic *r* etape și apoi să fie întrerupt (dacă nu s-a terminat deja), atunci obținem un joc pînă la ruinare (jocul *trunchiat),* și nu un joc stochastic. Eezolvînd acest joc cu metodele din § 5.2, obținem valorile v^r și strategiile optime ale jocurilor matriceale B_k. Numărul s definit de (5.3.13) are proprietatea că, pentru orice strategii folosite, *probabilitatea ca jocul să fie continuat mai mult de r etape nu depășește* s^r. Deoarece s^r este neglijabil, dacă *r* este suficient de mare, putem astfel să aproximăm jocul stochastic prin jocul obținut prin întreruperea sa după *r* etape. Este exact ceea ce realizează șirul de vectori v^r. în

afară de aceasta, strategiile optime aF și y^{kT} ale jocurilor trunchiate converg către *strategii optime staționare* ale jocului stochastic.

și deci, folosind (2.3.9), avem

$$\text{val } A = v_n = \min_{V} \max_{Y} \text{£} \qquad < v + k.$$

5.3.3. TEOREMĂ. *Există un vector* $v = (v_v .. .,v_p)$ *unic care satisface relațiile* (5.3.7) *și* (5.3.8).

Demonstrația unicității. Să presupunem că există doi asemenea vectori, v și w. Fie k componenta pentru care $| v_k — w_k |$ este maxim și să presupunem că $v_k — w_k = c >0$. Definim două matrice B_k și B_k astfel:

$$b^k ii = a^k u$$

Este evident că

$$\text{I} \qquad | < \text{S } \$ \mid v_t - w, / < c$$

și atunci din Ierna 5.3.2 rezultă că

$$\text{val } B_k < \text{val } B_k + \text{c},$$

adică, deoarece prin ipoteză v și w satisfac condițiile (5.3.7) și (5.3.8),

$$v_k < w_k + c,$$

ceea ce contrazice ipoteza că $v_k — w_k = c$. Cu aceasta unicitatea este demonstrată.

Demonstrația existenței. Vom construi un șir de vectori care converge către vectorul căutat. Pentru aceasta definim inductiv:

$$= (0,0, ...,0),$$

$$b_{ij}^{kr} = a_{ij}^k + \sum_i q_{ij}^{kl} v_l^r, \quad r = 1, 2, \ldots, \qquad (5.3.1$$

$$= \text{val } B^r{}_k = \text{val } (6|$$

(5.3.10)

(5.3.12)

Vom arăta că șirul de vectori $v^T = (v|, .. .,v_P)$ este convergent și apoi că limita sa verifică condițiile (5.3.7) și (5.3.8). Să notăm

(5.3.1

$$s = \max_{k.i.i\ ll=l} j\ S\ gtj$$

Semnificația acestei definiții este următoarea : $a\$^{l}$ este probabilitatea ca jucătorul I să folosească strategia sa pură i cînd în etapa t a jocului el joacă în situația . Jocul poate ajunge de mai multe ori în situația r_{fc}, dar jucătorul I nu trebuie să folosească aceleași probabilități de fiecare dată cînd joacă în această situație. Dacă însă el folosește una și aceeași repartiție de probabilitate de fiecare dată cînd joacă într-o anumită situație, atunci strategia se numește staționară. Pentru motivul simplității o strategie staționară este desigur preferată.

Pentru o pereche dată de strategii se poate calcula, pentru fiecare $k = 1, . .., p$, valoarea medie a cîștigului în ipoteza că prima etapă a jocului se joacă în situația . Astfel, valoarea medie a cîștigului pentru o pereche dată de strategii este un p-vector. Ca și în jocurile matriceale obișnuite, aceasta conduce la definirea strategiilor optime și a valorii jocului, aceasta fiind în acest caz un p-vector

$$® = (v_n\ v_{2t}..., v_p).$$

Dacă aceste valori există, atunci jocul în situația r_t se poate evident înlocui prin componenta v_k a valorii. Trebuie deci să avem

$$r_{fc} = valBj., \qquad (5.3.7)$$

unde $B_k = (b^)$ este matricea de dimensiune m_k x n_k definită prin

$$= a^k_{i\}} + X\ {}^{b}ii^{v}i \blacksquare \qquad (5.3.8)$$

Aceasta este evident doar o definiție implicită; trebuie să arătăm că există efectiv un vector $(®_n ...,?>„)$ unic care satisface condițiile (5.3.7) și (5.3.8).

5.3.2. LEMĂ. *Fie $A = (\%)$ și $B = (b_{i\}})$ matrice de*

dimensiune m x *n care satisfac condiția*

$$a^{bn} + k \quad (i = 1, \ldots, m\text{-}, j = 1, \ldots, n)$$

(5.3.9)

pentru un k dat. Atunci val $A <$ val $B + k$.

Demonstrație. Fie $v =$ val B și fie y o strategie optimă a jucătorului II în jocul B. Atunci pentru orice i

S<S*biM + k^yj < V + k*

într-o situație atinsă anterior, astfel că teoretic jocul se poate prelungi nedefinit. în afară de aceasta, după fiecare etapă a jocului se obține în general un cîștig, astfel încît un cîștig infinit este teoretic posibil. Totuși, regulile jocului includ o schemă aleatoare care garantează că, cu probabilitatea 1, jocul este finit și valoarea medie a cîștigului este finită.

Mai precis, un joc stochastic este o mulțime de *p elemente de joc {situații, poziții)* r_{fc}. Fiecare situație este reprezentată printr-o matrice m_k X n_k, ale cărei elemente

sînt de forma

Elementul a*,-, definit de (5.3.1), arată că, dacă în situația *k* jucătorul I alege strat

$$<^{**}u = <\blacksquare + \text{E } r_{(}, \qquad (5.$$

pură *j,* atunci cîștig

$$l=1 \qquad 3.1) \qquad (5.$$

unc

continuare se joacă în

$$> 0, \qquad 3.2) \qquad (5.$$

.,p) sau jocul se termi

$$\overset{P}{\underset{l=}{\text{E}}} < \text{i-} \qquad (5.$$

Condiția (5.3.3) arată că probabilitatea de terminare a jocului este în fiecare etapă pozitivă. De aici, probabilitatea unui joc infinit sau a unui cîștig mediu infinit este nulă.

5.3.1. DEFINIȚIE. Se numește *strategie* a jucătorului I o colecție de vectori $a?^{l}$ $\{k = 1, \ldots, p\ ;\ t = 1, 2, \ldots\}$, unde, pentru fiecare *t*, x^{kt} este un m_t-vector care satisface condițiile

$$\sum_{i=1} = 1, \tag{5.3.5}$$

$$0. \tag{5.3.6}$$

Strategia se numește *staționară* dacă, pentru fiecare *k*, vectorii *aP* nu depind de *t*. Analog, o strategie pentru jucătorul II este o colecție de n_k-vectori y^{kl}.

șoarice și un șoarice înlătură o femeie. Jocul este continuat pînă cînd o echipă rămîne cu un singur tip de jucători (cînd o echipă nu mai are posibilitatea unei alegeri, cealaltă cîștigă în mod evident). Matricea jocului arată în general astfel:

$$\begin{matrix} r\text{^}!—1,\ m_2;\ n_v\ n_2) \text{ IX},\ m_2\ ;\ n_v\ n_2—1) \\ r(m_n\ m_2;\ n_x—1,\ n_2)\ \ r\text{^},\ m_2—1;\ «j,\ n_2) \end{matrix} \qquad (5.2.1$$

și un raționament analog celui din exemplul 5.2.3 conduce la relația de recurență

$$v(m_u\ m_2,\quad n_2) =$$

i'(n7₁—l,m₂; n_1**,** n_2**)** $v(m_1,$ TTI₂— **1; 7i₁₍ n₂) —** $v(m_1,\ m_2;\ n_1 — l,n_2)v(m_1,m_2;$ **n,, n₂—1)**

11(77?!— 1, TTI₂; **7iₗₜ 7i₂) + t>(mi, m₂—1;** n_{lt} **n₂) —u(77ii,** TTI₂ ; n_2**—1,** n_2**)** — $r(m_l,m_2;$ 7?I,?I₂- **1)**

(5.2.1

6) care împreună cu condițiile inițiale

$$t(m_v\ m_2;\ n_{lf}\ 0) = «(wij,\ m_2;\ 0,\ n_2) = 4\text{-}1, \text{ dacă } m_{lt}\ m_2 > 0,$$

(5.2.17) 0 ; $n_n\ n_2) = v(0,\ m_2;\ n_{lf}\ n_2) = — 1$, dacă $n_{lf}\ n_2 > 0,$

(5.2.18)

determină inductiv valoarea jocului. Din păcate această ecuație cu diferențe neliniară nu se poate rezolva cu ușurință. Se pot obține totuși unele rezultate ; de exemplu, pentru ?n_2=M₁=n_2=l avem
Această relație de recurență coincide cu cea din exemplul 5.2.2 și deci

$$v(m,\ 1;\ 1,\ 1) = (m — 1) / (m\ 4\text{-}\ 1)$$

(5.2.21)

și strategiile optime coincid cu cele din 5.2.2.

5.3. JOCURI STOCHASTICE

Aceste jocuri sînt asemănătoare celor tratate în § 5.2, de

care se deosebesc totuși în cîteva aspecte importante. Deși există doar o mulțime finită de situații diferite, într-un astfel de joc se poate reveni

care împreună cu condiția inițială

$$Vi = 0 \qquad (5.2.7)$$

determină valorile v_N. Folosind substituția

$$t_N = \text{l}/(\text{®}\text{^}\quad 1), \qquad (5.2.8)$$

relația de recurență devine

$$-(\text{N-I}\ ^{1}I\hat{I}_{\text{J}} \qquad (5.2.9)$$

$$ti = -1. \qquad (5.2.10)$$

Se obține

$$t_N = -(\text{iy} + \text{i})/2,$$

de unde

$$V_N = (N-1)I(N+1). \qquad (5.2.11)$$

Formula (5.2.11) dă valoarea jocului după fiecare etapă. Putem determina acum strategiile optime ale fiecărui jucător în fiecare etapă. într-adevăr, matricea jocului (5.2.3) ia forma

$$\text{f}^{1} \qquad ^{1} \qquad 1 \qquad (5.2.12)$$

și formulele (2.5.22) și (2.5.23) dau strategiile optime pentru JV>2 :

$$= (\text{l}/(N+1),\ NI(N+1)), \qquad (5.2.13)$$

pentru $N > 2$.

$$y^N = (l/ţN+1),\ N/(N\,4-1)), \qquad (5.2.14)$$

5.2.3. Exemplu. *(Femei și pisici contra bărbați și șoareci).* în acest joc echipa I este formată din m_x femei și

m_2 pisici, iar echipa II constă din n_t șoareci și n_2 bărbați. în fiecare etapă, fiecare echipă își desemnează un reprezentant; în întîlnirea acestor reprezentanți unul îl înlătură pe celălalt conform următoarelor reguli: o femeie înlătură un bărbat, un bărbat înlătură o pisică, o pisică înlătură un

într-un joc cu rezerve mici, care se termină după un număr mic de etape, valoarea jocului și strategiile optime pot fi în general determinate în mod direct. în jocurile mai lungi se poate determina o relație de recurență între valorile diferitelor etape. Această relație este de obicei o ecuație cu diferențe finite. Dacă ea poate fi rezolvată, atunci valorile diferitelor etape se folosesc pentru construcția strategiilor optime ale jocului în mai multe etape. Dacă ecuația cu diferențe nu poate fi rezolvată, se poate obține uneori o aproximare satisfăcătoare a valorii acestui joc și a strategiilor optime.

5.2.2. Exemplu. *(Jocul inspecției).* Jucătorul I (răufăcătorul) urmărește să efectueze o acțiune interzisă într-una din N perioade de timp disponibile. Jucătorul II (inspectorul), care urmărește să împiedice această acțiune, poate efectua o singură inspecție, în una din cele N perioade. Cîștigul jucătorului I se consideră egal cu 4-1, dacă acțiunea a fost îndeplinită fără a fi descoperit, cu —1, dacă este descoperit (adică dacă perioada inspecției coincide cu perioada acțiunii), și egal cu 0, dacă acțiunea nu este deloc efectuată. în decursul primelor perioade (etape) ale jocului fiecare jucător are două alternative : jucătorul I poate acționa sau nu, jucătorul II poate controla sau nu. Dacă jucătorul I acționează și II controlează, atunci jocul se termină cu cîștigul — 1. Dacă jucătorul I acționează, dar II nu controlează, jocul se termină și cîștigul este 4- 1. Dacă I nu acționează, iar II controlează, atunci I va acționa într-o perioadă ulterioară (presupunem N >1) și deci va cîștiga +1. Dacă jucătorul I nu acționează și II nu controlează, atunci trecem la etapa următoare a jocului, care se deosebește de etapa precedentă numai prin aceea că pînă la sfîrșitul jocului rămîn un număr mai mic (A —1) de perioade de timp. Matricea primei etape este deci

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

v 1 J'v-i

Avem deci relația de recurență

$$v_N = \text{val} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix} \tag{5.2.5}$$

unde val A notează valoarea jocului A. Deoarece evident $v_{A._1}<l$,
jocul matriceal (5.2.5) nu are nici un punct șa. Atunci, folosind formula (2.5.24), obținem relația de recurență

(5.2.6)

de puncte al unui jucător se mărește cu 1. Un astfel de joc se termină deci întotdeauna după un număr finit de etape.

Este recomandabil ca astfel de jocuri să fie rezolvate prin parcurgerea lor în sens invers, de la sfîrșit către început. Ideea generală a rezolvării este că fiecare etapă a jocului poate fi concepută ca un joc în sine. După ce au fost alese strategiile pentru această etapă, rezultatul etapei este fie cîștigul final (dacă jocul în mai multe etape se termină), fie obligația de a juca etapa următoare a jocului.

Deoarece operăm întotdeauna cu valori medii, obligația de a juca încă o dată poate fi înlocuită cu valoarea acestui nou joc.

5.2.1. Exemplu. Considerăm jocul definit de schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & a_{12} \end{pmatrix} \tag{5.2.1}$$

unde elementele Tj și T_2 indică obligația de a juca respectiv jocurile cu matricele

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Dacă valorile jocurilor Tj și r_2 sînt respectiv v_v v_2, atunci Tj și r_2 pot fi înlocuite în (5.2.1), respectiv prin v_t și v_2, deoarece acestea sînt cîștigurile medii atunci cînd strategiile jucătorilor, relative la jocul
(5.2.1) , prevăd efectuarea jocului sau respectiv T_2. Putem înlocui deci schema (5.2.1) prin matricea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{12} \end{pmatrix};$$

Rezolvarea acestui joc matriceal oferă strategiile optime și valoarea jocului (5.2.1).

Astfel, în jocurile de ruinare se începe prin a se rezolva toate jocurile în care ambii jucători încep avînd o rezervă de o singură unitate. Deoarece se termină după o singură etapă, un astfel de joc poate fi rezolvat direct. Folosind valoarea acestui joc putem rezolva toate jocurile în care

rezerva comună a celor doi jucători este de trei unități. Aceste soluții dau posibilitatea să se rezolve apoi jocurile în care rezervele sînt de patru, cinci ș.a.m.d. unități.
asociată unei strategii de comportare *(y$_u$ y$_2$)* este

3/1(1 - 3/z), (1 - 3/l)3/2, (! - 2/1) (! - 3/$_Z$))- (5.1.1)

Strategia optimă a jucătorului II este vectorul (0, 5/7, 2/7, 0) (vezi exemplul 2.5.9), care evident nu se poate reprezenta sub forma
(5.1.1) . Prin urmare, acest joc nu are soluție optimă în strategii de comportare. în exemplul 5.1.3 dificultatea constă într-un anumit sens în aceea că, la a doua sa mișcare, jucătorul II nu cunoaște semnificația exactă a primei sale mișcări, sau a uitat complet ce mișcare a efectuat. Un astfel de joc se numește *joc cu memorie incompletă.* Această dificultate complică situația, și anume nu este clar dacă toate strategiile mixte sînt admisibile. De exemplu, în jocul de bridge putem considera perechea a doi parteneri ca un jucător care a „uitat" unele dintre mișcările sale anterioare. Presupunînd că convențiile secrete sînt interzise, un partener nu poate ști dacă licitația partenerului său este normală sau este făcută numai din considerente ,,tactice"(psihologice), deși el poate cunoaște probabilitatea unei asemenea licitații tactice.

Nu vom examina în detaliu aceste dificultăți. Clasa de jocuri pe care vrem să le studiem este foarte înrudită cu jocurile cu informație completă : după un anumit număr de mișcări ambii jucători obțin (simultan) întreaga informație (și pe care nu o uită), astfel încît într-un anumit sens jocul începe din nou din această poziție dată. Schema generală a jocului este următoarea : jucătorul I face prima mișcare, apoi joacă II (fără a cunoaște mișcarea jucătorului I), iar apoi urmează un pas aleator, după care ambii jucători primesc întreaga informație (această schemă se poate modifica puțin, dar numai în mod neesențial). Fiecare dintre aceste cicluri va fi numit *etapă* a jocului.

5.2. JOCURI DE RUINARE

Să considerăm acum o clasă de jocuri în care fiecare

jucător pornește cu o anumită rezervă finită. în fiecare etapă a jocului rezerva unuia dintre jucători se micșorează cu o unitate. învingător este jucătorul care își *ruinează* oponentul (îi epuizează rezerva). Este de asemenea posibil ca, numărîndu-se etapele cîștigate de fiecare jucător, cîștigător să fie considerat jucătorul care acumulează primul un număr de puncte fixat. în primul caz rezerva totală a jucătorilor se micșorează cu o unitate în fiecare etapă, în al doilea caz numărul *pentru mișcarea imediat următoare* și alegînd (în baza experienței sale sau altfel) pe cea mai bună dintre acestea.

Simplificarea constă în mod esențial în aceea că se înlocuiește o alegere dintre $. .k_N$ strategii pure disponibile prin N alegeri, anume cîte o alegere din cele alternative posibile ale fiecărei mulțimi de informație *i.* Aceasta conduce la următoarea definiție.

5.1.1. DEFINIȚIE. **O** *strategie de comportare* este o mulțime de N distribuții de probabilitate, fiecare definită pe mulțimea alternativelor unei mulțimi de informație.

5.1.2. Exemplu. Un jucător primește o carte dintr-un pachet de 52 de cărți de joc; după ce a privit cartea, el poate alege între *a pasa* sau *a miza* o anumită sumă dată. Există în total 2^{82} strategii pure, deci mulțimea strategiilor mixte are dimensiunea 2^{82}—1. Pe de altă parte, o *strategie de comportare* atribuie fiecărei cărți o probabilitate (adică un număr între 0 și 1) ca jucătorul să mizeze. Astfel, dimensiunea mulțimii strategiilor de comportare este 52.

Mulțimea strategiilor de comportare are în general o dimensiune mult mai mică ca aceea a strategiilor mixte. Trebuie însă să observăm că, în anumite condiții, nu toate strategiile mixte pot fi generate prin folosirea de strategii de comportare, după cum se vede din următorul exemplu.

5.1.3. Exemplu. în jocul cu arborele reprezentat în fig. 5.1, strategiile pure ale jucătorului II pot fi notate cu LL, LE, EL, EE.

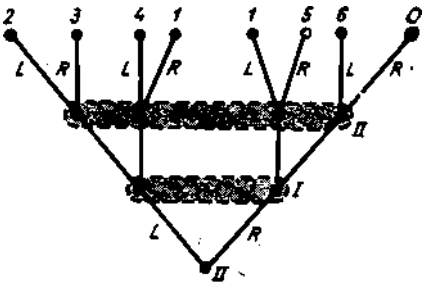


Fig. 5.1.

O strategie mixtă este un vector (a?$_n$ x_2, x_3, x_t), care satisface condițiile obișnuite. O strategie de comportare este dimpotrivă o pereche de numere reale (y_v y_2), astfel ca $0<y_t<1$. Strategia mixtă

JOCURI ÎN MAI MULTE ETAPE

5.1. STRATEGII DE COMPORTARE

Să considerăm un joc constînd din mai multe etape (pași), de exemplu următorul joc simplu : doi jucători așază succesiv cîte unul dintre pulurile lor, albe și respectiv negre, pe o ,,tablă de șah" pătrată cu nouă cîmpuri; jucătorul I cîștigă dacă reușește să așeze trei puluri coliniare, iar jucătorul II încearcă să evite aceasta prin așezarea pulurilor sale. Jucătorul I are nouă alternative pentru prima sa mișcare. Pentru fiecare dintre cele opt răspunsuri ale jucătorului II, jucătorul I are șapte alternative la a doua mișcare. Se vede că, numai în primele două mișcări I are la dispoziție $9\text{-}7^8$ = 51 883 2 09 strategii pure. Evident, nu poate fi vorba de o încercare de a le enumera. Chiar ținînd seama de o oarecare reducere datorită simetriilor, numărul total al strategiilor pure este astronomic. Și acest joc este totuși extrem de simplu (în sensul practic al cuvîntului, spre deosebire de șah care, deși din punctul de vedere al teoriei jocurilor este de asemenea simplu, practic este mult mai

complicat).

Este astfel evident că strategiile pure lasă în acest sens mult de dorit. Să ne reamintim definiția unei strategii mixte : o funcție, definită pe mulțimea mulțimilor de informație ale unui jucător, care asociază oricărei mulțimi de informație un număr natural între 1 și *Ic* (fc fiind numărul alternativelor într-o mulțime de informație dată). Astfel, dacă un jucător are *N* mulțimi de informație și pentru fiecare dintre ele *k* alternative, numărul strategiilor sale pure este k^N, care poate fi un număr foarte mare.

în jocul prezentat mai sus este cert că nici un jucător nu va juca ținînd seama de toate strategiile sale pure posibile (adică de toate succesiunile posibile de mișcări, de la prima pînă la ultima), ci mai curînd examinînd numai totalitatea alternativelor disponibile

9. Chiar un joc cu funcție de cîștig rațională poate avea o soluție singulară. Considerăm funcția lui Cantor *C(x),* definită prin condițiile

$$C(x/3) = C(x)/2,\ C(x) + C(1-x) = 1,$$

$$C(Xj) \qquad \text{dacă } x_1\ x_2.$$

a) Pentru orice funcție *f* integrabilă avem

$$\int_0^1 f(x)\,dC(x) = \int_0^{1/3} f(x)\,dC(x) + \int_{2/3}^1 f(x)\,dC(x).$$

b) Dacă *f* este continuă, avem

$$\int_0^1 [2f(x) - f(1 - x/3) + f(x/3)]\,dC(x) = 0.$$

c) Funcția

$$K(x,y) = \int_0^{a} (1/2)\,[2x - (1-x/3) - (x/3)]\,[2y^n - (1-y/3) - (g/3)]\,n = 0$$

este continuă și rațională pentru $0 \le x \le 1$, $0 \le p \le 1$. (Arătați aceasta, desfăcind parantezele și reordonlnd termenii). C(x) și *C(y')* slnt strategii optime ale celor doi jucători, iar valoarea jocului este nulă.

d) Fie F(x) o strategie optimă arbitrară a jucătorului I. Funcția *E(F, y)* este analitică in *y*. Prin urmare, ea fie se anulează în întreg intervalul [0,1], fie are în acest interval doar un număr finit de rădăcini.

e) Dacă *E(F, y)* nu este identic nulă în intervalul [0, 1], atunci *C(y)* nu poate fi strategie optimă pentru jucătorul II.

f) Faptul că pentru o strategie optimă *F* avem *E(F, y)* = 0 pentru orice *y* e [0,1] permite calculul momentelor *FW.* Prin urmare, oricare două strategii optime au aceleaşi momente. (în baza unei teoreme bine cunoscute rezultă de aici că două strategii optime sînt identice. De aceea *C* este strategia optimă unică a jocului.)

c) Jocul cu nucleul

$$A'(x, y) = (1 + x)\,(1+y)\,(l\text{-}xt/)/(l + xy)^2$$

are strategiile optime

$$F(x) = (4/—)\ \text{arctg}\ l^7!,$$

$$G(y) = (4/\hat{}) \text{ arctg } |'' \ y,$$

iar valoarea jocului este 4/TT.

5. Chiar pentru un joc cu un nucleu „foarte regulat” se poate să nu

existe valoarea jocului. Să considerăm de exemplu nucleul

$$K(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < y < x + \\ 0, & \text{dacă } x = y \text{ sau } y = x + \\ & \text{in caz contrar.} \end{cases}$$

a) Pentru orice strategie *F(x)* există un *y* astfel incit *E(F,* y)^l/3. £ Distingeți

cazurile *F* — oj 1/3 și — ⁻ ®j > 4/3 j .

3) - 0) < 3/7 și G (y -oj > 1/7J .
Prin urmare, 1/3 și «n^3/7. Arătați că valorile 1/3 și 3/7 sint efectiv atinse, pentru strategiile *F** și G* care folosesc numai valorile 0, 1/2, 1 și respectiv 1/4, Determinați probabilitățile acestor valori In strategiile mixte *F*,* respectiv G*.

Determinați strategiile optime și valoarea jocului

$$A(x, y) \begin{cases} 2x - y + xy, & \text{pentr } x < \\ 0, & \text{pentr } x = \\ x - 2y - xy, & \text{pentr } x > y. \end{cases}$$

b) Pentru orice strategie G(j/) există un *x* astfel Incit *E(x, G)* 3/7. £

Distingeți următoarele trei cazuri : 1) G(1 — 0)----------3/7 ; 2)

6(1 — 0) < 3/7 și G (— oj < 1/7 ;

c) anume 1/2, 1.

«. cu

7. Deduceți o metodă pentru rezolvarea jocului de duel in care fiecare participant dispune de două cartușe in loc de unul. Se presupune că jocul este silențios, adică nici unul nu știe dacă celălalt a tras deja sau nu (exceptlnd cazul cind a fost lovit).

8. Fie c_{lt} c_a, c_s numere pozitive astfel incit $c_i + Cj > c_k$ pentru orice *i, j, k* diferite. Considerăm următorul joc : jucătorul I alege numerele nenegative (x_3, x_2, x_3) cu suma 1, jucătorul II alege numerele nenegative (y_v y_2, y_3) cu suma 1, funcția de ciștig fiind

$$A(x, y) = Cj \operatorname{sgn}(xj - t/J + c_2 \operatorname{sgn}(x_2 - y_2) + c_3 \operatorname{sgn}(x_3 - y_2).$$

Determinați strategiile optime ale acestui joc.

a) Fie mai intîi $\frac{d^n K}{d y^n} > 0$. In ipoteza că există o strategie *F(x)* optimă pentru jucă torul I, arătați că orice strategie optimă împotriva lui *F* este formată din cel mult n/2 puncte.

b) Să presupunem acum că $\frac{d^n K}{d y^n} < 0$. Fie $L_t(x,y) = K(x,y), + ey^n$, unde e> 0, și fie

GȚ O strategie optimă a jucătorului II corespunzătoare nucleului L_t. Dacă G_o este un punct de acumulare al mulțimii strategiilor G_e cu e—>0 atunci G_o este o strategie optimă pentru II relativ la nucleul *K.* (Analog, orice punct de acumulare F_o al mulțimii strategiilor optime ale jucătorului I relativ la nucleul L_E este o strategie optimă pentru I relativ la *K).*

2. Arătați că dacă nucleul *K* este continuu și K_{vv}^. 0 pe Întreg pătratul unitate, atunci jucătorul I are o strategie optimă mixtă care folosește cel mult două puncte (strategii pure).

a) Arătați că jucătorul II are o strategie optimă pură y_B.

b) Dacă *F* este o strategie optimă pentru jucătorul I, atunci $K(x, y_Q) = v$ pentru orice punct *x* folosit In strategia *F.*

c) Dacă jucătorul I nu posedă nici o strategie pură optimă, atunci el are două strategii pure și x_2, astfel Incit K_v (x_v t/$_0$)> 0 și $K_v(x_2, y_0)<0$.

d) Jucătorul I posedă o strategie optimă mixtă care folosește doar strategiile pure ii și x_2.

3. Să considerăm jocul pe pătratul unitate cu nucleul

$$P(x, y) = \mathbf{J}^{m}_{n} \mathbf{£} \, an \, xi \, yi.$$

***1*= 0 3=0**

a) Dacă două funcții de repartiție Fj(x) și $F_2(x)$ au primele *m* momente egale, adică pentru i = l,...,m avem

$$Fi^0 = \int_{-'o} xi\, dF_t(x) = \int_{\bullet' o} xi\, dF_2(x) = F_{\dot{t}}\hat{}\,,$$

atunci F_2 este o strategie optimă dacă și numai dacă F_2 este optimă. Analog, dacă $G_r(.y)$ și $G_2(y)$ au primele *n* momente egale, atunci G_2 este optimă dacă și numai dacă G_2 este optimă.

b) Punctul avind drept coordonate momentele F<3>, *i*= 1,..., *m, ale* uneifuncții de repartiție arbitrare F, aparține acoperirii convexe a curbei din spațiul m-dimensional definite de ecuațiile r_t = r* (i = 1,..., m).

c) Jucătorii I și II posedă strategii optime care folosesc cel mult *m,* respectiv *n* puncte.

d) Exprimați funcția de cîștig *E(F, G)* prin momentele F<"> și G<3> și arătați că strategiile optime ale ambilor jucători se pot determina rezolvînd un sistem de ecuații algebrice.

4. Faptul că un joc pe pătratul unitate are nucleul continuu, sau chiar rațional, nu garantează existența unor strategii optime care folosesc doar un număr finit de puncte.

a) Dacă *K(x, y)* este o funcție rațională continuă și dacă jucătorul I posedă o strategie optimă care folosește cel mult *m* puncte, atunci aceasta se poate obține prin rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice.

b) Dacă funcția *K(x, y)* este rațională și *v* este un număr transcendent, atunci nic unul dintre jucători nu posedă o strategie optimă care folosește un număr finit de puncte și integrala (4.6.15) devine

$$\int_{\bullet' o} /1 - x^2 /(a?^2 + t^2 - t^2x^2)\check{a}t.$$

Deoarece această integrală nu depinde de *x,* derivata sa în raport cu variabila *x* este nulă. Această derivată este o nouă integrală, și este suficient să anulăm expresia de integrat. Obținem astfel ecuația diferențială

$$xf(R) = 2<r(l - <c^2)(l-f^2)/'(7?),$$

care se reduce la

$$f(R) = 2(1-R)f'(R).$$

Soluția acestei ecuații este

$$j(R) = ci\ yr_R=ci$$

Pentru a aplica aceasta la problema noastră trebuie să ținem seama că raza cercului considerat aici este numai o treime a unității. Avem deci

$$/(\text{®i}, \text{«2}, \text{«s}) = C7\ 1\text{^}1\text{—}9r^2,$$

unde

$$r^2 = (\text{^i-Va})^2 + (\text{^-}^1/3)^2 + (\text{^3-}^1/3)^2\text{-} \qquad (4\text{-}6.16)$$

Constanta C se determină cu ușurință din faptul că valoarea integralei pe o dreaptă (care intersectează M) este egală cu 3/2. Se obține $C = 9/2$ și deci strategia optimă este

$$f = 9/(2\ \text{ț}T\text{^}r^2) \qquad (4.6.17)$$

pentru toate punctele cu r<l/3 și egală cu 0 în afara acestei mulțimi.

PROBLEME

1. Fie $K(x, y)$ nucleul unui joc pe pătratul unitate. Să presupunem că funcția K are derivate parțiale continue pină la ordinul n inclusiv și

$$\frac{d^n K}{d\,y^n} > 0$$

in Întreg pătratul unitate. Arătați că jucătorul II are o strategie optimă formată din cel mult n/2 puncte (convenind ca o margine a intervalului [0, 1], dacă este folosită, să fie numărată ca 1/2 punct).

deoarece această expresie este constantă pe dreapta *PQ.* Dreapta punctată trecînd prin *Q* (din fig. 4.3) împarte mulțimea *M* în două părți. Partea situată deasupra acestei drepte este formată din puncte care pierd în fața strategiei *Q;* partea situată sub această dreaptă constă din puncte care cîștigă în fața acestei strategii *Q.* Prin urmare, integrala lui / pe prima mulțime trebuie să fie egală cu 1/2. Mai departe, orice dreaptă $x_2 = a$ intersectează această parte, dacă *a* aparține intervalului (0, 1—r); de aceea integrala lui/pe această mulțime este totodată egală cu *k* (1 — *r).* Deci

$$\frac{1-r}{r} = \frac{1}{2}$$

și, prin

$$r = \frac{2}{3}. \qquad (4.6.1$$

Mulțimea conexă *M* este deci conținută în hexagonul 0< *Xi^.2/3 {i* = 1,2,3). Funcția / este pozitivă pe și nulă în afara acesteia, iar integrala lui / pe orice segment paralel cu una dintre laturile triunghiului și care intersectează pe *M* este egală cu 3/2.

Aceste concluzii nu determină univoc nici funcția /, nici mulțimea Jf, și deci sînt posibile mai multe strategii optime. Putem alege de exemplu drept *M* cercul (discul) înscris în hexagon (acesta este evident regulat), iar drept / o funcție care depinde numai de distanța pînă la centrul cercului. Dacă / are proprietatea că integrala sa are aceeași valoare pe orice segment avînd o anumită direcție dată, atunci integrala sa are aceeași valoare pe orice dreaptă care intersectează *M.*

Să considerăm acum cercul $x^2 + y^2<l$. Să căutăm o funcție/(7?) cu proprietatea că integrala

$$\int_{0}^{/i-x-} /(^{2} + y^{2}Wy \qquad (4.6.1$$

este constantă pentru orice «e(—1,1). Efectuînd schimbarea de variabilă

$$y = t\,\mathbf{1/1 - x^2},$$

obținem

$R = x^2 + y^2 = x^2 + t^2 — t^2x^2$

și deci *E(ți,* P')<0. Aceasta contrazice ipoteza că ;u. este strategia optimă. Prin urmare, *închiderea mulțimii M trebuie să intersecteze toate laturile triunghiului.*

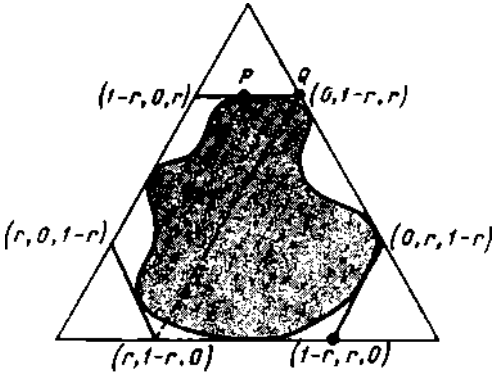


Fig. 4.3.

Minimul valorilor x_Y, x_2 și x_3 pe mulțimea este deci zero. Să determinăm acum maximul acestor valori. Fie maximul coordonatei x_x pentru punctele din *M.* Deoarece mulțimea *M* este conexă, fiecare dreaptă $x_x = a$, unde $0<a<r_n$ intersectează mulțimea *M.* Aceasta înseamnă însă că integrala funcției / pe *M* este egală cu *' *r^k.* Prin urmare, r_t = *ljlc.* Analog, maximul valorilor x_2 și x_3 (pe *M)* este r = 1/fc. Astfel mulțimea *M* .este inclusă în hexagonul (fig. 4.3) definit de inegalitățile

$$0 < x_t < r \ (i = 1, 2, 3).$$

Fie acum *P* un punct în închiderea lui Jf cu $x_3 = r$. Notînd *Q* = (0,1— *r, r),* avem

E(lh Q),

*) Se folosește (4.6.13) și următoarea formulă de iterare a integralei multiple :

$$1 = \int_M f\,d\sigma = \int_0^{r_1} \left(\int_{L_1} f\,ds \right) dx_1 = \int_0^{r_1} k\,dx_1 = kr_1,$$

unde L_x = {(x_p x_2, XjJlx, = const}. *(N-T.)*

ceea ce

$$\int_{L_1} f ds = \int_{L_2} f ds = \int_{L_3} f ds = k, \tag{4.6.13}$$

adică valorile integralelor lui f pe cele trei segmente ale paralelelor prin P la laturile triunghiului trebuie să fie egale.

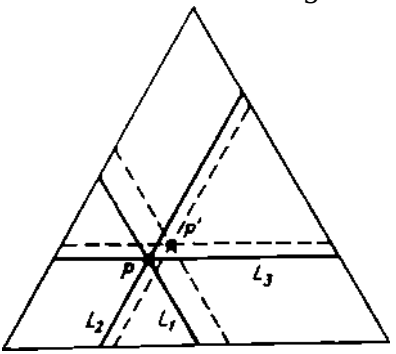


Fig.

Trebuie să determinăm acum mulțimea *M.* Să presupunem mai întîi că închiderea lui *M* nu intersectează dreapta a?j=0. Fie *P* un punct al acestei mulțimi pentru care este minim. Pentru că *P* aparține închiderii mulțimii în *P* este îndeplinită egalitatea (4.6.9). Dacă

$$P' = (x_1 - 2s, x_2 + e, X_3 + e),$$

ținînd seama de (4.6.11), avem

$$\int_{A'\cup B'\cup C'} f d\sigma = {}^1/_2 + 2\varepsilon \int_{L_1'} f ds - \varepsilon \int_{L_2'} f ds - \varepsilon \int_{L_3'} f ds$$

Evident, dreapta nu intersectează mulțimea *M,* deoarece pe această dreaptă prima coordonată are o valoare mai mică decît în punctul *P,* în care se atinge minimul acestei coordonate pe *J|I.* Pe de altă parte, cel puțin una dintre dreptele L_2 și L_a intersectează mulțimea *M* (pentru e suficient de mic), deoarece mulțimea *M* este prin ipoteză conexă și nu poate să fie inclusă în mulțimea limitată de dreptele L_2, L_a și laturile triunghiului (adică în mulțimea *F).* De aici rezultă că Egalitatea *E* (p, *P)* =0 înseamnă că

$$\int_{A'\cup B'\cup C'} f d\sigma < \frac{1}{2}$$

$$(/d_{(}r = {}^{1}/_{2} \qquad (4.6.9)$$
JaU-BUC

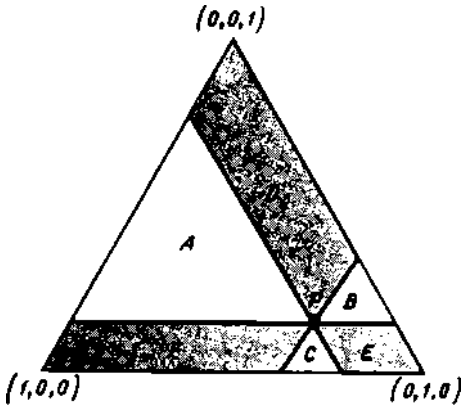


Fig. 4.1.

(unde u este măsura Lebesgue a planului). Analog, deoarece $E(n, P') = 0$, avem

$$ț \qquad /du = {}^{1}/_{2}, \qquad (4.6.10)$$

unde *A', B', C'* sînt domeniile corespunzătoare lui *P'*.

în fig. 4.2 se vede că mulțimile *A* U *B* (J *C* și A'tjP'U^' diferă numai prin cele trei benzi situate între dreptele L_v L_2, L_a, paralelele prin *P* la laturile triunghiului, și paralelele corespunzătoare duse prin punctul *P'* (liniile punctate). Fie $P = (ar_n\ x_2,\ x_3)$ și A *P* ■-= (Aajj, Ao>$_2$, Ax_3). Dacă AP este mic, diferența dintre integralele din (4.6.9) și (4.6.10) este aproximativ

$$Aa>i(/ds + Aa?_2(Jds + Ax_3 (fds \qquad (4.6.11)$$
Jii JL_3

(unde s este măsura Lebesgue unidimensională). Expresia (4.6.11) trebuie să se anuleze pentru toate valorile Aa^, A<r_2, &x_3 care satisfac condiția

Demonstrațiile teoremelor 4.6.1 și 4.6.2 sînt extensii ale demonstrațiilor teoremelor 4.3.1, 4.3.2 și 4.4.2 (aceste demonstrații nu au folosit decît compacitatea și convexitatea mulțimilor strategiilor pure, și nu structura lor particulară). Nu vom da aici aceste demonstrații.

Ca și mai sus, atragem atenția că nu există metode generale pentru rezolvarea acestor jocuri continue, dar că discontinuitatea nucleului face adesea posibilă rezolvarea lor analitică.

4.6.3. Exemplu. Doi generali dispun de același număr de soldați și luptă pentru ocuparea a trei puncte strategice. Un punct este ocupat de partea care dispune acolo de mai mulți soldați. Se presupune că fiecare armată este indefinit divizibilă, iar drept valoare a funcției de cîștig se consideră numărul punctelor ocupate. Mulțimea X este atunci mulțimea tuturor tripletelor ordonate $x = (x_1, x_3, x_3)$ care satisfac condițiile

$$+ {}^{X}s = 1, \tag{4.6.6}$$

$$x_{(}>0,\ i = 1,2,3. \tag{4.6.7}$$

Mulțimea Y este definită analog, iar funcția de cîștig este

$$A(x,y) = \text{sgn}\ (\text{^} - yj + \text{sgn}\ (x_2 — y_2) + \text{sgn}\ (\text{a?}_3 - y_3).$$

(4.6.8)

Cu alte cuvinte, fiecare jucător alege trei numere nenegative cu suma 1; un jucător cîștigă dacă două dintre numerele sale depășesc pe cele corespunzătoare ale adversarului; jocul este nedecis dacă două asemenea perechi coincid.

Mulțimea X se poate reprezenta ca un triunghi echilateral (fig. 4.1). Se poate observa că, alegînd un punct P, un jucător cîștigă, dacă adversarul său alege un punct arbitrar al domeniilor D, E sau F, și pierde, dacă adversarul alege un punct al domeniilor A, B sau C. (Jocul se termină nedecis, dacă adversarul alege un punct al unuia dintre segmentele care separă aceste domenii.)

Să presupunem că există strategii optime și că ele sînt repartiții continue, care pot fi reprezentate ca integrală

Lebesgue a unei funcții /, pozitivă în interiorul unui domeniu conex *M* și nulă în afara acestuia.

Să presupunem acum că f este pozitivă într-o vecinătate a unui punct P. Dacă P' = P + AP este un punct arbitrar al acestei vecinătăți, în baza simetriei jocului avem

P(|X, P)=^([x, P') = 0.

Deoarece orice mulțime de puterea continuumului se aplică bi- jectiv pe intervalul unitate, orice joc în care mulțimea strategiilor pure ale fiecărui jucător are această putere se poate reprezenta ca un joc pe pătratul unitate. Dificultatea constă în aceea că prin această transformare se pot pierde proprietățile funcției de cîștig. Preferăm de aceea să păstrăm structura dată a mulțimilor strategiilor.

Ca și pînă acum funcția de cîștig (nucleul jocului) *A{x, y)* este definită pe produsul cartezian X x T al mulțimilor strategiilor pure. O strategie mixtă pentru jucătorul I este o măsură *ți* pe *X* cu

,u(J) = l **(4.6.1)**

și, analog, o strategie mixtă pentru jucătorul II este o măsură v pe Y cu

v(Y) = l. **(4.6.2)**

Cîștigul mediu se definește astfel:

$$= \int_{X} \hat{}(a?,\hat{})d[i(a?), \quad \textbf{(4.6.3)}$$

$$E(x, v) = \int_{Jy} A\{x,y)\check{a}v\{y), \quad \textbf{(4.6.4)}$$

$$\blacksquare E(.u, v) = \int_{\blacksquare' IxF} A\{x, y)d\{\text{ți}x_{v),} \quad \textbf{(4.6.5)}$$

presupunînd ca aceste integrale există. Se observă că, dacă integrala (4.6.5) există, atunci ea poate fi înlocuită prin oricare dintre integralele iterate corespunzătoare.

Valoarea jocului și strategiile optime se definesc la fel ca

și pentru jocurile pe pătratul unitate. Următoarele două teoreme generalizează proprietățile corespunzătoare ale jocurilor pe pătratul unitate.

4.6.1. TEOREMĂ. *Dacă mulțimile X și* Y *sînt compacte și nucleul este continuu, atunci* $v_T = v_u$ *și există strategii mixte optime.*

4.6.2. TEOREMĂ. *Dacă X și* Y *sînt mulțimi convexe compacte ale unor spații liniare și dacă nucleul este o funcție continuă, concavă în x {pentru orice y) și convexă în y {pentru orice x), atunci jocul posedă un punct șa format din strategii pure.*

Am determinat deci strategia optimă a fiecărui jucător. Ea

este funcția de repartiție continuă F definită astfel :

Se poate verifica cu ușurință că acesta, într-adevăr, este soluția jocului. $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 1/3, \\ 1 & \text{dacă } x > 1/3. \end{cases}$ (4.5.3

4.5.2. Exemplu. Să considerăm din nou duelul din exemplul precedent, cu deosebirea că acum armele nu sînt silențioase, adică un adversar știe dacă oponentul său a tras și nu a nimerit. în acest caz el va trage evident abia în momentul $t = 1$, cînd nimerește cu siguranță. Prin urmare, dacă I alege momentul x și II alege momentul y astfel ca $x<y$, atunci I cîștigă cu probabilitatea a? și pierde cu probabilitatea 1 — x. Deci

$$K(a?, y) = 2a? — 1, \qquad (4.5.31)$$

$$<?(a?,?/) = 1 - 2y, \qquad (4.5.33$$

Am putea încerca să folosim aceeași cale ca în exemplul precedent. Este însă ușor de văzut că acest joc are un punct șa format din strategii pure. într-adevăr, avem

$$A\ (Va, y) = L(X, y) = l—2y \quad \text{dacă } y < {}^1l_i,$$

$$> 0$$

$$A\ ({}^x/_2, ?/) = (V_2) = 0, \quad \text{dacă } y = {}^1l_2,$$

$$A({}^1/_2, y) = -\hat{}({}^1/_2, y) = o, \quad \text{dacă } y > {}^1j_2,$$

deci 1/2 este o strategie optimă pură.

4.6. DIMENSIUNI MAI MARI

Ultimele patru paragrafe au tratat, toate, jocuri pe pătratul unitate, adică jocuri în care mulțimea strategiilor pure ale fiecărui jucător este un continuum unidimensional.

Trebuie să determinăm acum *a, b* și *Ic.* Să considerăm mai întîi cazul *b<l.* Știm că pentru orice *y e (a, b)* avem

$$E\ (F,\ y) = 0$$

și, deoarece funcția *E (F, y)* este continuă în *y,* rezultă

$$E(F,b) = 0.$$

Prin urmare,

$$(\ (a? — b + bx)\ \mathrm{dP}\ (x) = 0.$$

Atunci, în ipoteza că *b<l,* avem

$$(\ (x — 1 + x)\ dF(x) < 0,$$

și deci *E (F,* 1) < 0, ceea ce contrazice condiția (4.5.17). Prin urmare

$$b = l. \qquad (4.5.27)$$

Întrucît *b* = 1, rezultă *E (F,* 1) = 0, adică da; = 0, care conduce la

$$k\int_a^1 2x — 1 \qquad 3a^2 — 4a + 1 = 0.$$

Această ecuație are soluțiile a = 1 și a = 1/3. Este evident că a = 1 este inacceptabil și deci

$$a = 1/3. \qquad (4.5.28)$$

Deoarece *F* este strategie, avem

$$Icx^3\ dx =$$

$$J1/3$$

de unde

este silențios, adică nici unul nu știe dacă adversarul său a tras deja (exceptînd cazul cînd a fost nimerit).

Să determinăm forma nucleului acestui joc. Dacă jucătorul I alege momentul *x,* iar jucătorul II alege momentul *y >x,* atunci jucătorul I își nimerește adversarul cu probabilitatea *x* (fie în acest caz cîștigul său + 1) și nu îl nimerește cu probabilitatea 1 — *x,* fiind el însuși nimerit cu probabilitatea *y* (fie în acest caz cîștigul său — 1). Cîștigul mediu al jucătorului I este deci

$$K(x, y) = x - y + xy. \qquad (4.5.19)$$

Jocul este evident simetric și deci avem analog

$$L(x, y) = x - y - xy \text{ Și} \qquad (4.5.2$$

<p(a?) = 0.

De aici

$$F_v(x,y) = -1 + \qquad (4.5.2$$

$$(4.5.2$$

$$L(y,y) — K(y,y) = -2y^2. \qquad (4.5.2$$

Să presupunem acum că strategia optimă este o funcție de repartiție continuă F cu derivata pozitivă în intervalul (a, *b).* Atunci

$$— 2y^2F'(y) = ((— 1 \quad x)F'(x) \text{ da? } + ((—1 — x)F'(x)ăx. \quad (4.5.24)$$

Ja 'v

Derivînd ambii membrii, această ecuație integrală se transformă în ecuația diferențială

$$-4yF^r - 2y^2F'' = (y - 1)F' + (y + 1)P',$$

adică

$$yF'' = -3.F'. \qquad (4.5.2$$

Soluția acestei ecuații este

$$F'(y) = ty\sim^3. \qquad (4.5.2$$

La aceste șase relații se adaugă desigur condițiile că F și G sînt strategii și că și 0<c<d<l. Dacă sistemul tuturor acestor
restricții are o soluție, atunci rezolvarea lui ne dă strategiile optime, ca și valoarea jocului. Dacă sistemul nu are soluție, atunci putem trage concluzia fie că jocul nu posedă strategii optime, fie că acestea nu sînt de tipul considerat mai înainte.

Uneori nucleul este *strîmb-simetric,* adică sînt verificate condițiile

$$L(x,y) = - K (y, x) \tag{4.5.14}$$

$$9\ (a?) = 0. \tag{4.5.15}$$

în acest caz o analiză asemănătoare cu aceea din § 2.6 arată că valoarea jocului, dacă există, este nulă, și strategiile optime, dacă ele există, sînt identice pentru ambii jucători. Prin urmare, avem $F = G$, a = c, $b = d$, $v = 0$, și relațiile date mai înainte se reduc la

$$E(F, y) = 0 \text{ pentru orice } y \text{ e (a, \&),} \tag{4.5.16}$$

$$J?(F,î/) > 0 \text{ pentru orice } y, \tag{4.5.17}$$

$$[L\ (y, y) — K\ (y, y)]F'\ (y) =$$

$$= \int_a^y K_y(x, y)\, F'\,(x)\, dx + \int^b L_v(x,y)F'\ (x)\ d\# \text{ pentru orice } y \text{ e } (a, b). \tag{4.5.18}$$

Acest sistem, împreună cu celelalte restricții, dă soluția jocului, dacă aceasta există.

4.5.1. Exemplu. Să considerăm următorul *duel.* Două persoane („jucători"), care se găsesc la momentul $t = 0$ în puncte diferite, se îndreaptă unul către celălalt și se întîlnesc la momentul $t = 1$. Fiecare dispune de un pistol cu un singur cartuș și poate să tragă în orice moment. Dacă unul nimerește pe celălalt, fără ca el însuși să fie atins, duelul se termină și cel care a atins pe adversar este cîștigător. Duelul este nedecis, dacă nici unul nu nimerește sau dacă ambii trag simultan și nimeresc.

Facem următoarele două ipoteze : prima, că precizia crește odată cu apropierea adversarilor, mai exact că unul își nimerește adversarul cu probabilitatea *t,* dacă trage în momentul *t;* a doua, că duelul unde *v* reprezintă valoarea jocului. Dacă *G'* este pozitivă în punctul y_0, atunci ea este pozitivă într-o vecinătate a lui y_0. Prin urmare, pentru orice *y* suficient de apropiat de y_0 avem *E (F, y)=v.* Dar aceasta înseamnă că

$$dE\,(F,\,y)ldy = 0, \tag{4.5.6}$$

adică

$$[Z\,(y,\,y) - K\,(y,\,y)]F'\,(y) = (\,K_v(x,\,y)\,F'(x)\,Ax + \int_{Jo}$$

$$+\,(\,L_v\,(x,\,y)\,F'\,(x)\,Ax \tag{4.5.7}$$
$$J_v$$

(această ecuație integrală în *F'* se poate uneori rezolva cu ușurință). Să considerăm acum un joc cu nucleul de forma (4.5.1). Desigur, nu știm dacă există strategii optime și, dacă există, nu știm dacă ele sînt repartiții continue, discrete sau continue pe porțiuni. Este destul de natural să considerăm că strategiile optime *F* și *G* sînt repartiții continue, ale căror derivate *F'* și *G'* sînt pozitive respectiv în intervalele (a, *b)* și (c, *d)* și nule în afara acestor intervale. în acest caz între funcțiile *F* și *G* și numerele a, *b, c, d, v* există următoarele relații :

E (F, y)=v	pentru orice	*y e(c, d),*	(4.5.8)
E (F, y) > v	pentru orice	*y,*	(4.5.9)
E (x, G) = v	pentru orice	*x* e *(a, b),*	(4.5.10)
E (x, G) <	pentru orice	*X,*	(4.5.11)

[Z *(y, y)* - *K (y,* y)] *F'(y) = x,y)F'(x)Ax +*

(E_v(x, y)F'(x) da? pentru orice *y* G(C, *d),*

-o •'v

(4.5.12)

$$[E(x, x) - L(x, a;)]\, G'(x) =$$

$$= \left(L_x(x, y)\, G'(y)\, Ay + \left(K_x(x, y) G'(y) Ay \right. \right. \text{ pentru orice } x \in (a, b).$$

$$\int_0^x \qquad \int_a^x$$

(4.5.13)

existența strategiilor optime. Dacă un asemenea joc are însă strategii optime, atunci tocmai discontinuitățile (nucleului) fac uneori posibil calculul acestora cu metode analitice.

în acest paragraf tratăm clasa de jocuri pe pătratul unitate numite *jocuri în timp.* Un exemplu tipic de astfel de joc este acela, în care fiecare jucător ia o singură decizie într-un interval de timp dat. Ordinea în care cei doi jucători acționează este de importanță primordială. Acest fapt implică o discontinuitate a nucleului pe diagonala $x = y$ a pătratului unitate.

Să considerăm un joc cu nucleu de forma

$$A(z, i/) = \begin{cases} K(x, y), & \text{dacă } x < y, \\ <\text{p}\ (\text{a?}), & \text{dacă } x = y, \\ L(x, y), & \text{dacă } x > y, \end{cases} \quad (4.5.1)$$

unde funcțiile K și L sînt definite și continue pe mulțimea perechilor (x, y) cu $0<\text{a?} < y < 1$ și respectiv $0 < y < x < 1$, iar funcția y este continuă pe intervalul [0,1].

Deși existența strategiilor optime nu este garantată, putem deduce cîteva proprietăți ale strategiilor optime, *în cazul că există.* Fie F o strategie mixtă a jucătorului I. Atunci pentru orice y e [0, 1] avem

$$E(F, y) = |_{\text{Jo}}^{V} K(x, y)\, dF(x) + <\text{p}\ (y)\,[F(y) - F(y - 0)] + \\ + (_{Jy} L(x, y)\, dF(x). \quad (4.5.2)$$

Dacă funcția de repartiție F este continuă, termenul din mijloc dispare, adică

$$E(F,y) = \{_{\text{Jo}} K(x, y)\, dF(x) + \text{î}\ _{Jy} L(x, y)\, dF(x). \quad (4.5.3)$$

Să presupunem că F și G sînt strategii optime ale jucătorilor I și II și că ambele sînt funcții de repartiție continue. Se arată că, dacă F și G sînt optime, iar y_0 un punct cu proprietatea că

(4.5.4)

atunci

Considerăm acum funcția compusă <ț°cp. Aceasta este evident o aplicație continuă a lui [0,1] în [0, lj. Conform teoremei de punct fix al lui Brouwer, există un *x* astfel ca

$$X = \text{lpa(p } (x).$$

Notînd $y = <\text{p } (x)$, avem deci

$$® = \text{ip } (y), \tag{4.4.7}$$

$$y = <?(\$), \tag{4.4.8}$$

ceea ce înseamnă că *(x, y)* este un punct șa, și deci strategiile *x* și *y* sînt optime.

4.4.4. Exemplu. Să considerăm jocul cu nucleul

$$\mathbf{A} \text{ (a?, } y) = — 2x^2 + y^2 + 3xy — x — 2y.$$

Deoarece $A_{xx} = — 4$ și $A_{yy} = 2$, jocul este concav-convex. Anulînd derivata parțială

$$A_x = — 4 \text{ a? } + 3y — 1,$$

obținem valoarea $x = (3y — 1) /4$ care maximizează pe *A.* Această valoare aparține intervalului [0,1] numai dacă y 1/3, în caz contrar maximul obținîndu-se pentru $x = 0$. Avem deci

$$\text{P(3/)} \quad \begin{matrix} 0, \text{ daca } y \text{ 1/3,} \\ (3\text{y} — \text{l})/4, \text{ dacă } y > 1/3. \end{matrix} \tag{4.4.9}$$

Analog, anulînd $A_y = 2y + 3x — 2$, se obține

$$_ \quad \begin{matrix} f(2 — 3x)/2, \text{ dacă } x \text{ 2/3, (O,} \\ \text{dacă } x > 2/3. \end{matrix} \tag{4.4.1}$$

Acum se găsesc cu ușurință strategiile optime și valoarea jocului: $x = 4/17$, $y = 11/17$, v - 13/17.

4.5. JOCURI ÎN TIMP

Am arătat deja că nu există nici o metodă analitică pentru rezolvarea jocurilor continue, deși aceste jocuri posedă întotdeauna strategii optime. în jocurile cu nucleu

discontinuu nu este asigurată

Fiindcă funcția B_v își atinge maximul în x_0, în (4.4.3) prima integrală este cel mult egală cu $B_y(x_0)$ și deci

$$E(F,y) < B_v(x_0) + ax_0 = A(x_0,y). \qquad (4.4.4)$$

Așadar, strategia pură x_0 este cel puțin tot așa de bună ca F împotriva oricărui y. Analog se arată că strategia pură y_0 este cel puțin tot așa de bună ca G împotriva oricărui x. Strategiile pure și sînt deci optime.

Demonstrația teoremei 4.4.2 este — într-un anumit sens — complicată în mod nenecesar. Teorema conține o afirmație asupra strategiilor pure, dar demonstrația folosește strategii mixte. Dăm pentru aceasta o a doua demonstrație, care se bazează exclusiv pe strategii pure, dar folosește ipoteza ceva mai tare a convexității stricte și concavității stricte.

4.4.3. ALTĂ DEMONSTRAȚIE PENTRU 4.4.2 (în ipoteza concav lății și convexității stricte). Pentru orice x dat există y unic determinat (datorită convexității stricte) care minimizează $A(x, y)$. ₁ ctăm această valoare a lui y prin <p(x). Avem deci

$$A(x, ?(\#)) = \min_{v} A(x, y). \qquad (4.4.5)$$

Să presupunem că funcția 9 nu este continuă. Fie <c₀ un punct de discontinuitate și $<?(x_0) = y_0$. Atunci există un șir de numere reale {j"ₙ} care converge spre x_0, în timp ce șirul {<p(crₙ)} ri: converge spre y_0. Deoarece intervalui [0, 1] este compact, șirul {.■ are un subșir convergent, {cr„fr}, cu limita y' / y_0. Deoarece

$$-A_{\text{Ț}\,(\bullet\hat{}n^*)) < A_{2/ob}$$

trecînd la limită și folosind continuitatea lui A, obținem

$$_{(\hat{}o,}\, y\,)\, A_{(\bullet\hat{}'o\text{»}\ 2/o)>}$$

care contrazice faptul că y_0 este *unica* valoare care minimizează $A(x_0, y)$. Această contradicție arată că <p este continuă.

Analog, definim funcția $d>(y)$ ca valoare x care maximizează funcția $A(x, y)$, adică prin

trepte, adică dacă este suficient un număr finit de strategii pure sau este necesară o repartiție continuă. Paragrafele următoare prezintă cîteva realizări obținute în aceste direcții.

4.4. JOCURI CONCAV-CONVEXE

4.4.1. DEFINIȚIE. Un joc pe pătratul unitate se numește *concav- convex,* dacă nucleul său *A(x, y)* este concav în *x* pentru orice *y* și convex în *y* pentru orice *x.*

într-un joc concav-convex nucleul are într-un anumit sens o conformație de șa și deci se poate spera să existe un punct șa format din strategii pure. Această proprietate poate fi într-adevăr demonstrată, cu ipoteza suplimentară de continuitate.

4.4.2. TEOREMĂ. *Un joc concav-convex cu nucleu continuu A(x, y) posedă strategii optime pure.*

Demonstrație. Pentru că jocul este continuu, există strategii optime, să zicem *F* și *G,* pentru jucătorii I, respectiv II. Notăm

$$x_0 = \int_0^1 x\,dF(x), \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

$$y_0 = \int_0^1 y\,dG(y). \qquad (4.4.2)$$

Deoarece funcția *A* este concavă în *x,* pentru orice *y* dat există a astfel ca funcția

$$B_v(x) = A(x, y) - a.x$$

să-și atingă maximul (pentru *y* fixat) pentru valoarea x_0. Avem

$$E(F, y) = \int_0^1 (B_y(x) + \text{oca?})\,dF(x),$$

$$E(F,y) = \int_{0}^{\infty} B_v(x)dF(x) + \int_{0}^{\infty} xdF(x). \qquad (4.4.3$$

și, prin urmare,

$$|E\{F_{n},y) - E\ (F_{n},\ j/n)| < s.$$

Astfel, pentru orice y avem

$$E\ (F_{n},\ y) > w_{n} - \text{E}$$

și deci

$$> \mathbf{W}_{n} - \mathbf{E}.$$

Analog se arată că

$$^{v}\mathbf{11} < {}^{w}\mathbf{n} + {}^{e}\text{-} \qquad (4.3.6)$$

Din ultimele două inegalități rezultă

$$^{v}i > \quad - 2\ \text{e}$$

și, fiindcă v_{t} v_{n} și E este arbitrar, avem

$$\text{®i} = \text{®IP}$$

Este demn de notat că din demonstrația teoremei 4.3.2 rezultă că (4.3.8

$$v = \lim_{n}\ w_{n} \qquad (4.3.9$$

și totodată faptul că strategiile F_{n} aproximează strategia optimă oricît de bine. în acest sens jocurile matriceale A_{n} aproximează jocul continuu $A(x,\ y)$. Dacă nucleul este „foarte neted", se poate arăta că se obține o aproximație suficient de bună chiar pentru valori mici ale lui n. Pe de altă parte, dacă nucleul este foarte neregulat, este necesar un n mare pentru o aproximare bună. Metodele cele mai des folosite pentru rezolvarea jocurilor matriceale (de exemplu metoda jocului fictiv sau metoda simplex) nu sînt în general suficient de rapide pentru rezolvarea unui joc de asemenea dimensiuni (circa 100 x 100). De aceea ar fi de dorit să se rezolve astfel de jocuri cu metode analitice. Din păcate, nu există metode generale în acest scop. *Dezvoltarea unei asemenea metode este în prezent una dintre problemele deschise extrem de importante ale teoriei jocurilor.*

în afară de aceasta, ar fi interesant de găsit un criteriu pentru a decide dacă strategia optimă F a unui astfel de joc

este o funcție în

Fiecare dintre integralele din membrul al doilea, și deci și limita lor, este cel puțin egală cu Vj pentru orice *y,* și deci

$$\min_{v} E\ (F_o,\ y) > v_T. \qquad (4.3\text{-}2)$$

Ținînd seama de definiția lui v_v rezultă că în (4.3.2) avem egalitate și deci supremul din (4.2.9) se atinge pentru F_o. Analog se arată că inf sup se poate înlocui prin min max.

4.3.2. TEOREMĂ. *Dacă nucleul A(x, y) este continuu, atunci* ®i = v_n.

Demonstrație. Pentru orice număr natural *n* considerăm matricea A_n = *(a"])* de dimensiune (n+1) x (n+1), definită prin

$$aii = A(i/n,\ j/n)\ i,\ j = 0,1,\ldots,\ n. \qquad (4.3.3)$$

Fie r_n = (rg,..., rj) și = (sg, ..., s") strategii optime ale jucătorilor I, respectiv II, și fie w_n valoarea jocului de matrice A_n. Funcția *A (x,y)* este continuă și deci, fiindcă pătratul unitate este compact, uniform continuă, adică pentru orice e>0 există un S>0, astfel încît

$$fA\ (x,y) - A\ (x',\ y')l < e$$

pentru orice *x, y , x', y',* astfel ca

$$F(a? — x')^2 + (y — y'')^2 < 3.$$

Fie *n* astfel ca 1/n < S. Considerăm strategia F_n definită prin

$$F_n\ (®) = \underset{<=o}{\overset{[M]}{S}}\ r? \qquad (4.3.4)$$

(unde *[nx]* reprezintă cel mai mare întreg care nu depășește pe *nx).* Fie *y* arbitrar și *j = [ny].* Este evident că

$$E\ (F_n,\ j/ri) \underset{1=0}{\overset{n}{=}} S < r'' > \qquad (4.3.5$$

și, deoarece |*y —j/n*| < 8, avem

$$|A\{x,y) - A\ (x,\ j/n)| < \mathrm{e},$$

4.3.1. TEOREMĂ. *Dacă nucleul A(x, y) este continuu pe pătratul unitate, atunci* sup inf *și* inf sup *se pot înlocui respectiv prin* max min *și* min max.

Demonstrație. Deoarece *A(x, y)* este continuă, pentru orice *F* funcția

$$E(F,y) = \int_{J_Q} A(x, y)\, dF(x)$$

este continuă în *y.* Deoarece intervalul [0, 1] este compact, *E (F, y)* își atinge minimul pe acest interval, deci sup inf se poate înlocui prin sup min. Conform definiției lui v_v pentru orice *n* există o funcție de repartiție F_n, astfel încît

$$\min E(F_n, y) > v_I - \text{lln}.$$

Vom folosi proprietatea cunoscută că din orice șir de funcții de repartiție pe [0, 1] se poate extrage un subșir convergent (punctual). Fie F_o limita unui astfel de subșir al șirului $(F_{lf} F_2, \ldots)$. F_o are proprietățile (4.2.1), (4.2.2) și (4.2.3), deoarece fiecare funcție F_n are aceste proprietăți, dar nu are în general proprietatea (4.2.4), deoarece această proprietate nu se păstrează prin trecere la limită. Se arată însă că funcția care diferă de F_o cel mult în punctele de discontinuitate ale lui F_Q, este o strategie. Fiindcă F_o și F_o sînt funcții de repartiție, mulțimile punctelor lor de discontinuitate sînt cel mult numărabile și, prin urmare,

$$F_o(x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{pentru } x = 0, \\ F_0(x + 0), & \text{pentru } 0 < x < \\ 1, & 1, \text{ pentru } x = 1, \end{cases} \qquad (4.3.1$$

$$\int_{J_o} A(x, y)\, dF_0(x) = \int_{J_O} A(x, y)\, dF_0(x)$$

pentru orice *y.* Funcția *A (x, y)* este continuă pe compactul [0,1] X [0,1] și deci uniform continuă. Atunci, fiindcă F_o este limita unui subșir al șirului F_n, avem

$$\int_{\bullet_o} A\{x, y)\, d_F_0(x) = \lim_{n \to J_o} \int A(x, y)\, dF_n(x).$$

Se presupune că aceste integrale există și, prin urmare,

$$E(F, G) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} E(F, y)\, dU(y) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} E(x,G)\,dF(x). \quad (4.2.8)$$

STRATEGII OPTIME ȘI VALOAREA JOCULUI. Ca și în cazul jocurilor finite, putem defini următoarele două valori*[1] :

$$= \sup_{F}\inf_{y} E(F, y) \quad (4.2.9)$$

$$= \inf_{G}\sup_{x} E(x, G). \quad (4.2.10)$$

Trebuie să elucidăm următoarele două probleme. 1) Este adevărată egalitatea $v_I = v_{II}$. 2) Pot fi înlocuite sup inf și inf sup prin max min, respectiv min max ? Dacă răspunsul la ambele întrebări este afirmativ, atunci există strategii optime; dacă aceste strategii optime pot fi determinate, atunci jocul este, ca și în cazul finit, perfect determinat. Dacă numai răspunsul la prima întrebare este afirmativ, atunci există o valoare a jocului $(v = v_I = v_{II})$, dar nu există strategii optime; există însă strategii numite „e-optime", adică pentru orice e >0 dat există strategiile mixte F și G ale jucătorilor I și II, astfel ca

$$E(F,y) > v - e, \quad (4.2.11)$$

$$E(x, G) < v + e, \quad (4.2.12)$$

pentru orice x și y din [0, 1]. Jocul este deci într-un anumit sens stabil, deși nu este complet determinat ca în cazul jocurilor finite.

4.3. JOCURI CU NUCLEU CONTINUU

Dintre jocurile pe pătratul unitate considerăm mai întîi pe cele în care funcția de cîștig $A(x, y)$, numită și *nucleu* al jocului, este continuă. Vom arăta acum că pentru aceste jocuri există strategii optime.

*> Să notăm că $\sup_F \inf_y E(F,G)$ și $\inf_G \sup_F E(F, G)$, ceea ce rezultă din următoarea proprietate simplă a integralei Stieltjes : dacă h este continuă pe [0, 1], notînd cu P mulțimea funcțiilor de repartiție pe [0, 1], avem

$$\inf_{H \in P} \int h(x)\, dH(x) = \inf_{x \in [0,1]} h(x)$$

și o proprietate similară pentru supremum. (xV. *T.)*

4.2. JOCURI PE PĂTRATUL UNITATE

O clasă importantă de jocuri infinite constă în jocurile în care fiecare jucător are un continuum, de strategii pure, reprezentate de obicei ca puncte ale intervalului [0, 1]. O strategie pură a fiecărui jucător este deci un număr real din acest interval, iar funcția de cîștig este o funcție cu valori reale, *A(x, y),* definită pe pătratul unitate [0, 1] X [0, 1].

Ca și pînă acum, o strategie mixtă este o distribuție de probabilitate pe mulțimea tuturor strategiilor pure. în acest caz, o strategie mixtă poate fi reprezentată prin funcția sa *de repartiție,* adică o funcție *F* definită pe [0,1] cu valori reale, cu proprietățile :

$$F(0) = 0, \tag{4.2.1}$$

$$J'(l) = 1, \tag{4.2.2}$$

$$\text{din } x > x' \text{ rezultă } F(x) > F(x'), \tag{4.2.3}$$

$$F(x) = F(x + 0) \text{ pentru orice } x\,0. \tag{4.2.4}$$

Dacă jucătorul I folosește strategia pură *x,* iar II folosește strategia mixtă *G,* cîștigul mediu este dat de următoarea integrală Stiel- tjes :

$$E(x,G) \int A(x,y)\, dG(y). \tag{4.2.5}$$

Dacă jucătorul II folosește strategia pură *y,* iar I strategia mixtă *F,* cîștigul mediu este

$$E(F,y) = \int_{Jo} A(x, y)\, dF(x). \tag{4.2.6}$$

în sfîrșit, dacă jucătorii I și II folosesc respectiv strategiile *F* și *G,* cîștigul mediu este

$$E(F, G) = \int_{Jo}^{1} \int A(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{4.2.7}$$

Deoarece strategia x a fost aleasă arbitrar, rezultă

$$\sup_{x} \inf_{i} \mathbf{5}\ a_{iN}\, x_f = — 1. \qquad (4.1.7)$$

Analog se arată că

$$\inf_{V} \sup_{i} S\ Vi = 1- \qquad (4.1.8)$$

Prin urmare, teorema minimax (chiar generalizată prin înlocuirea lui min, max respectiv cu inf, sup) nu este verificată. Să mai observăm că toate liniile (și toate coloanele) matricei jocului sînt dominate.

4.1.2. Exemplu. Să considerăm jocul cu funcția de cîștig $a_{ij}=i—j$, unde $i, j = 1, 2,...$ Ca și în exemplul 4.1.1, scopul fiecărui jucător constă în a alege un număr natural cît mai mare. Aici însă funcția de cîștig nu este mărginită, ceea ce aduce complicații suplimentare.

Să considerăm strategia x definită prin

$$\begin{cases} 1/2\text{-i, dacă'i} = 2^* \ (k \text{ fiind număr natural}) \\ 0, \text{ in caz contrar.} \end{cases} \qquad (4.1.9)$$

Se arată cu ușurință că aceasta este într-adevăr o strategie. Pentru orice j avem

$$\sum_{i=1}^{oo} = \sum_{i=1}^{06\ 00} ix_f - X_{i-1}\ 3^*i = \sum_{t=1}^{oo} - i.$$

de unde rezultă

$$5J_{i=1}^{<x>}\ {}^{a}a = +\ 00. \qquad (4.1.10)$$

Prin urmare, strategia mixtă x aduce un cîștig mediu infinit pentru jucătorul I împotriva oricărei strategii pure a lui II. Cu alte cuvinte, jucătorul I își poate asigura, independent de II, un cîștig mediu infinit. Deoarece jocul este însă simetric, jucătorul II poate să își asigure un cîștig mediu de asemenea infinit. Acest joc este astfel evident patologic. Dacă în

exemplul 4.1.1 nu este verificată teorema minimax, acest al doilea joc contrazice bunul simț.

exemplu, ca seria (4.1.3) să nu fie convergentă, sau ca seriile

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{2=1}^{\infty} x_i a_{vj} \qquad (4.1.4)$$

$$\sum_{2=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{\gg} \qquad (4.1.5)$$

deși convergente, să aibă sume diferite. în plus, mulțimea strategiilor mixte nu este compactă, și deci maximele sau minimele pe aceste mulțimi nu există întotdeauna.

Următoarele două exemple ilustrează alte dificultăți. Putem adăuga că interesul pentru jocurile cu o mulțime numărabilă de strategii este de fapt epuizat prin aceste exemple.

4.1.1. Exemplu. Să considerăm jocul cu funcția de cîștig $a_{ij} = =\text{sgn}(i - j)$, $i,j = 1,2,\ldots$ (în esență acest joc constă în următoarele : fiecare jucător alege un număr natural; cel care a ales numărul mai mic plătește adversarului o unitate. în această formă jocul nu este prea plin de sens.)

Fie x o strategie mixtă a jucătorului I. Se știe că pentru orice $e > 0$ dat există un număr natural N astfel încît

$$\sum_{>=1}^{N-1} X > 1 - E$$

și deci

$$S < E. \qquad (4.1.6$$

Dacă jucătorul I folosește strategia mixtă x, iar jucătorul II folosește strategia sa pură N, se obține cîștigul mediu

$$S_i \, a_{iN} x_i < -1 + 2 £$$

și, prin urinare,

$$\inf £ \, a_{iN} Xf = -1.$$

ɴ t

JOCURI INFINITE

4.1. JOCURI CU O MULTIME NUMĂRABILĂ DE STRATEGII

Am tratat pînă aici aproape exclusiv jocuri *finite,* adică jocuri în care fiecare dintre jucători are la dispoziție o mulțime finită de strategii. Vom extinde acum noțiunile pentru jocuri infinite. Considerăm mai întîi jocuri cu o mulțime numărabilă de strategii, pe care le numerotăm cu numere naturale. Ca și la jocurile finite de două persoane, reprezintă valoarea medie a sumei cîștigate de jucătorul I de la juctorul II, dacă I și II folosesc strategiile lor pure *i* și respectiv *j.*

Prin *strategie mixtă* a jucătorului I se înțelege un șir $x = (x_1, x_2, \ldots)$ de numere reale cu proprietățile

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, \tag{4.1.2}$$

$$x_i \geq 0.$$

Analog, o strategie mixtă pentru jucătorul II esteunșir $y = (y_v y_2, \ldots)$ cu aceleași proprietăți. Pentru strategiile mixte (x, y) funcția de cîștig este presupunînd că această serie e6te absolut convergentă.

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} x_i y_j \tag{4.1.3}$$

Jocurile cu o mulțime numărabilă de strategii pun în evidență cîteva dificultăți care nu pot apărea la jocurile finite. Éste posibil, de

Determinați o pereche de strategii optime și valoarea următoarelor jocuri matriceale :

10. (4 3 1 4 Ă
2 5 6 3 '
k 1 7 0 J
0

...
1 5
- 0 4
(6 - 0
4)
/ 5 3 1

12. | 4 2 6 3 5 |
| 2 4 G 4 1 |
| \ 1 3 2 5 |

Un *flux* In rețea este un vector *x*= (xy), ale cărui componente Xy reprezintă †††1 mărimea „{luxului" care trece de la nodul *i* spre nodul *j* prin muchia Ay. Un flux trebuie să satisfacă următoarele condiții evidente :

Xy *Cțf,* *i,j* **1,.. n,**

Xy* = Xy = y Xy, 1 = 1, , . *n, iți iți

n + 1

Zoo = **Xî** ˣ*o>'*

***i* = 1**

n

ˣ***n + l.* n + 1** = **Vi** ˣ**j.n + r**

3=0

Arătați că $x_M=x_{n+li\ b\ +_1}$ (această valoare se numește *valoarea fluxului).* Prin Mieturda rețelei se Înțelege o mulțime de muchii și noduri, care are cel puțin o muchie sau un nod comune cu orice drum care unește originea cu destinația. *Valoarea* unei tăieturi este prin definiție suma capacităților muchiilor și nodurilor tăieturii. Demonstrați următoarea teoremă de flux maxim/tăietură minimă : valoarea fluxului maxim este egală cu valoarea tăieturii minime.

††† Pentru *i=£j;* pentru *i = j,* iy reprezintă fluxul care trece prin nodul *i. (N.T.)*

6. max $(2x_4 + 5x_2)$,
$X| -f- 3\ x_2\ 7$,
$2ij + x_2 < 6$,
$x_v\ x_2 > 0$.

7. ni in $(3XJ+6X.;- x_3)$,
$x_1 + 4x_2 + 5IJ >$
$7,\ 3x_2+ x_3 \quad 5$,
$3Xj \qquad x_3$ **8,**
$x_2, x_2, x_3 \quad 0$.

8. m $(ij+dij —6x_3)$,
ax $3XJ-I-2X2— x_3\ C$
$5,\ x_2 +4x_3 <$
7,
$— x_1 + 4x_2+$
$x_v < 8,\ Xl\ x_v\ x_3\ 0$

9. min $(x\hat{}Xj + lj+x\hat{},$
$3x_1 + 2x_2+x_3 +$
$x_4>1$,
$x_a+x_3\ x_4\hat{}6,\ XJ$
$+x_3+2x_4 =$

2. Arătați că valoarea programului liniar

$$\begin{aligned} \min\ & (2x_I — 3x_a + 4x_a), \\ & 2x_a — x_3 — 2, \\ & -2ij + 3x_s > \quad 3, \\ & Xi\ 3x_a \quad 4, \\ & Xi > \quad 0,\ i= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

este zero. (Indicație: arătați că programul este consistent și determinați programul dual).

3. Fie A(x, *y)* o funcție continuă pe pătratul unitate [0,1] X [0,1] și fie *b(y)* și e(x) funcții continue pe intervalul [0,1], Arătați că, dacă funcțiile f(x) și *g(y)* slnt continue și nenegative pe [0, 1], atunci din inegalitățile

$$\int_0^1 A(x, U)\, fC^1)\, dx < ă(y)$$

Și

$$\int_O^1 y)\, y(y)\, dy > c(x)$$

rezultă

$$c(x)\, f(x)\, dx < \int_0^A b(y)\, g(y)\, dy.$$

4. Fie *A* matricea unui joc, *B* o matrice cu aceleași dimensiuni ca *A,* v(A) valoarea jocului A și

$$\frac{dv(A)}{dB} = \lim_{a \to 0} \frac{v(A + aB) - v(A)}{a}.$$

Arătați că

$$\frac{dv}{dB} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} xBy^t,$$

unde *X* și Y slnt mulțimile strategiilor optime ale jucătorilor I, respectiv II In jocul *A.*

5. (Problema fluxului Intr-o refea). O rețea este un sistem de noduri (virfuri), numerotate 0, 1, 2, 3, ..., n + 1, unite prin muchii Ayțf^fcj). Nodurile 0 și n + 1 se numersc respectiv *origine și destinație.* Muchiile nu slnt orientate, adică considerăm $A_{ij} = A_{ji}$ pentru toți i, *j.* Fiecare muchie A_{ij} are o *capacitate Cy,* și fiecare nod i are o capacitate (de tranzit) C_i (dacă o muchie A_{ij} lipsește, se pune $C_{ij} = 0$).

cu restricțiile

$$zE - xA < 0, \quad (3.7.14)$$

$$xB < C, \quad (3.7.15)$$

$$2, x > 0. \quad (3.7.16)$$

Această problemă poate fi desigur rezolvată cu oricare dintre metodele de rezolvare a programelor liniare, de exemplu folosind algoritmul simplex. In mod similar se arată că determinarea strategiei optime a jucătorului II se reduce la problema de minimizare :

$$\min Cs' \quad (3.7.17)$$

cu

$$-yA^{l} > 0,$$

$$yE^{*} > F, \quad (3.7.18)$$

$$s, y > 0.$$

Se observă că problemele (3.7.17) - (3.7.20) și (3.7.13) - (3.7.16) formează o pereche de programe duale. Dacă ambele sînt consistente, atunci valorile (3.7.1) și (3.7.6) sînt egale, și deci jocul cu restricții are un punct șa în strategii mixte.

PROBLEME

1. Scrieți problemele duale ale următoarelor programe liniare :

a) $\max (x_x + 3x_2 - x_3)$,

$3xj + x_2 < 5$,

$ii - 3x_2 + x_3 > -6$,

$Xj\text{-}f\text{-}SXg\ 4$,

$0, 1 = 1,2, 3;$

b) $\min (2x_2 + 5x_2 + 6x_3)$,

$ij + 3x_2 + x_3 > 5$,

$3x_2 + 2x_3 > 7$,

$*i + \% > {}^{3}$.

$x_4 > 0, 1 = 1,2, 3.$

vexe X și respectiv Y, adică din domenii definite prin egalități și inegalități liniare. Dacă matricea jocului este $A = (a^)$, sarcina jucătorului I constă în a determina

$$\max_{VGY} \{\min xAy^{l}\}, xeX \quad (3.7.1)$$

unde mulțimile X și Y sînt definite prin

$$xB^C, \quad (3.7.2)$$

(3.7.3)

și respectiv

$$yF^{l} > F, \quad (3.7.4)$$

$$y > 0- \quad (3.7.5)$$

Sarcina jucătorului II constă în a determina

$$\min_{\text{ver } xex} \{\max xAy^{l}\}. \quad (3.7.6)$$

în (3.7.1) expresia din paranteză este o funcție de x, care poate fi interpretată ca valoarea optimă a unui program liniar în care coeficienții funcției obiectiv depind de x. Din teoremele de dualitate din 3.2 rezultă că programele duale

$$\min (a?A)t/' \quad (3.7.7)$$

cu restricțiile

$$yE^{l} > F, \quad (3.7.8)$$

$$y>o \quad (3.7.9)$$

și respectiv

$$\max zF^{l} \quad (3.7.$$

cu restricțiile

$$zE < xA, \quad (3.7.$$

(3.7.11)

$$z > 0 \quad (3.7.12)$$

au aceeași valoare dacă primul este și (ceea ce în general nu depinde*' de x). Cu aceasta sarcina I se reduce la o simplă problemă de

$$\max zF^{*} \quad (3.7.13)$$

*) Afirmația este falsă. Mărginirea programului (3.7.7) — (3.7.9) depinde in mod esențial de x și este echivalentă cu consistența restricțiilor programului dual. *(X.T.)*

cu

$$-2\%! + x_2 < -3,$$

$$\geqslant$$

$$-2x_2 < 4,$$

$$x_{lf}\ x_2 \quad \mathbf{0}$$

Primul tabel simplex

x_2 1

-2 1	1 —2*	-3 4
1	1	0

(3.6.1

și efectuînd două iterații,

$x^{\wedge}$ 1

-7/r -^2	x/2 -x/2	5 —2
3/2		2

(3.6.1

u_x u_2 1

-4/v -2/v	-2/T -'/14	-2°/7 -24/?
6/7		44/7

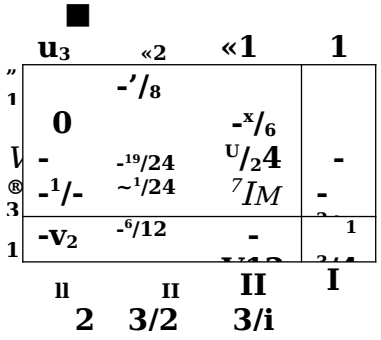
(3.6.1

Din acest tabel se vede că programul este nemărginit.

3.7. JOCURI CU RESTRICȚII

Teoria programării liniare are numeroase aplicații și în afara teoriei jocurilor. Deși multe dintre ele sînt foarte interesante, nu ne ocupăm de ele aici. Vom da numai o aplicație care aparține teoriei jocurilor.

Să considerăm un joc în care nu toate strategiile mixte pot fi folosite. O asemenea mărginire intervine deseori în practică. Să presupunem că strategiile mixte x, y trebuie alese din poliedrele con-



Tabelul (3.6.12) dă în sfîrșit soluția : strategia optimă a jucătorului I este (1/8,1/2, 3/8). Variabilele duale, pe care nu le-am scris în tabelele intermediare, dau ca strategie optimă a jucătorului II (1/12, 5/12, 1/2, 0). Valoarea jocului este 13/4.

Acest exemplu necesită cîteva observații. Tabelul (3.6.8) a fost transformat prin interschimbarea variabilelelor w_4 și u_3. în iterația următoare am făcut acest lucru cu w_3 și u_v Evident am fi economisit o iterație, dacă interschimbam direct w_4 cu u_{lf} *ceea ce* ne-ar fi condus de la tabelul (3.6.8) direct la (3.6.10). Eegula (3.5.1) nu dă deci drumul cel mai scurt; ea poate fi însă modificată astfel încît să se reducă volumul de calcule.

A doua observație este că tabelul (3.6.8), deși nu oferă o soluție de bază admisibilă, oferă totuși o soluție de bază dual-admisibilă. Se poate modifica regula (3.5.1) astfel încît să se ajungă la soluția optimă nu prin calculul succesiv al unor soluții de bază admisibile, ci al unor soluții dual-admisibile. în calculul de mai înainte nu am folosit deloc faptul că tabelul de plecare (3.6.8) corespunde unei soluții de bază dual-admisibile, ci am început prin a căuta o soluție admisibilă. Dacă în căutarea acestei soluții admisibile reușim să folosim numai tabelele care corespund unor soluții de bază dual-admisibile, atunci prima soluție admisibilă obținută este deja soluția optimă.

A treia observație este următoarea: nu este necesar să notăm în tabele variabilele duale și v_{if} deoarece fiecare ?/,■ se găsește întotdeauna pe aceeași linie sau coloană cu variabila w,- corespunzătoare, și analog pentru $i|$ și x_v Evident o transformare nu modifică aceste poziții relative.

$$\max\left(®! + a;_{a}\right)$$

Interschimbăm acum liniile și coloanele, astfel incit ultima coloană să corespundă lui 1 și ultima linie să corespundă funcției obiectiv X. Schimbînd semnele tuturor elementelor

din ultima linie, obținem ■Z-l *l/g 1
în continuare p egulii (3.5.1), pînă la

-3	—	—	4
-3	—	—	1
1	—	-1*	2
1	1	0	-1
-1	-3	-1	5

(3.6.8

obținerea unei soluții de bază admisibile:

Ø?!	x_2	u_3	**1**	**1**	—
4	3	-1		—2	=«₂Uj
0	6*	—1		-3	=—
3	7	—1		—4	=-
11	0			—	**X**
2	4	-1		1	

u_3

$^{u}4$ (3.6.10)

x_3

(3.6.9)

Dispunînd acum de o soluție de bază

admisibilă, procedăm în continuare conform regulii (3.5.2):

4*	-V2	-[1]/,	~'le
0		-[1]/.	~'le
3	-[7]/6	'le	~'le
1	~'le	'le	~'le
2	-[2]/s	~'l₃	3

$x_r\ u_2\ u_x$ **1**

X

cu restricțiile

$$3\hat{} \text{ H- } 5x_2 + a?_3 > X,$$

$$6a?! + 2a?_2 + 4a?_3 > X,$$

-3	-5	—	1
-6	—	—	1
-1	-4	-3	1
-4	-2	—	1*
—	—	-1	0

(3.6.

$$a?i + 4a?_2 + 3 >$$

$$4a?_x + 2a?_2 + 5$$

$$Xi + + x \quad 1$$

$$a?i, x_{2t} \; a \quad 0$$

Primul tabel simplex este

a?j a?2 #3 X

Mai întîi trebuie să efectuăm transformări, astfel incit X să devină variabilă de bază în locul lui 1. Deoarece elementul din coloana lui X și linia lui 1 este nul, aceasta va necesita două iterații.

în tabelele următoare pivotul este întotdeauna marcat cu asterisc.

a	a	a	w_4		
1	-3	4	—	=	- «1
-	0	1	—	-	^
3	_2	2	—	=	^
—	—	-5	1	=	—
1	-1	-	0	=	—

(3.6.

a?i	a?2	1	u_4		
-	—	4	-1	=	- «1
-	-1	1	-1	=	—
1	-4	2	-1	=	—
1	3	-5	1	=	—
1	1	-1	0		—

Soluția optimă este deci (7/3, 0, 4) și valoarea funcției obiectiv este $w = 47/3$.

3.6.2. **Exemplu**

$$\min (6y_x + 4I/_2 + 7y_3)$$

cu

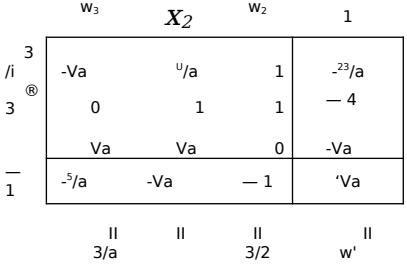
$$l/i + 3I/_3 > 5,$$

$$3yi + y_z + y_3 > 2,$$

$$-1/1 + 2/2 > V$$

$$3/1,3/2,1/3 > 0.$$

Se observă că acesta este programul dual celui din 3.6.1 Dacă am fi scris tabelul (3.6.1) complet, astfel incit să rezolvăm simultan cele două programe duale, atunci, procedînd ca mai înainte, se obține ca ultim tabel:



(3.6.

Soluția optimă a programului dual celui din 3.6.1 este (0, 1, 5/3) și valoarea funcției obiectiv este 47/3, ca și în problema din 3.6.1.

3.6.3. **Exemplu.** Să rezolvăm jocul matriceal

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Scriem mai întîi problema de maximizare (3.1.7) — (3.1.10) corespunzătoare :

max X

eu

$$-|- 3a?2 \quad ^3 < ®,$$

$$a?_2 + a?_3 < 4,$$

$$< 7,$$

$$a?_3 > 0.$$

Construim primul tabel simplex :

*^2 *^3 1

1	**3**	**—**	**-6**
0	**1**	**1**	**—**
3	**1**	**0**	**-7**
5	**2**	**1**	**0**

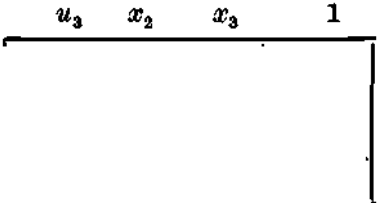
(3.6.

- «1

— «3

W

Deoarece toate coloanele au ultimul element pozitiv, putem alege pivotul în orice coloană, să zicem în prima coloană. Atunci pivotul este elementul marcat cu asterisc.



Transformarea tabelului cu acest pivot conduce la tabelul în acest tabel alegem ca pivot elementul marcat cu asterisc; transformarea conduce la tabelul

-Va	**[8]/a**	**—**	**- [n]/a**
0	**1**	**1***	**—4**
V	**Va**	**0**	**-[7]/a**
-[6]/a	**Va**	**1**	**[35]/a**

= - Ui =

— «2 = -

Xi = w

-Va	**[11]/[1]**
0	**1**
Va	**Va**

(3.6.

—	-²/a -1	⁴⁷/a

U_3 3?2 U_3 1

= - *Ui*

= — X_3 =

- *Xi*

= *w*

atunci, înlocuind variabila s,- prin = «, + s, se obține

I ^{a}li $^{a}2$> • • • ^{a}mi ^{e} I — ^{s}ji e se alege pozitiv și suficient de mic. Acest program modificat se rezolvă cu algoritmul simplex*'. Deoarece această modificare înlătură degenerarea, programul se rezolvă într-un număr finit de pași, pre- supunînd că există soluție optimă. Soluția optimă depinde desigur de e, dependența fiind în general liniară. în final, anulînd e, se obține soluția optimă a programului inițial.

Perturbările considerate, care înlocuiesc restricțiile 0 prin condițiile mai slabe $s' > 0$, măresc în general domeniul soluțiilor admisibile. Ne interesează numai vîrfurile acestui poliedru. Dintre acestea o parte vor fi afectate de perturbare, anume acelea pentru care $\delta_i = 0$. în fiecare din aceste puncte valoarea funcției obiectiv se modifică proporțional cu e . Dacă soluția optimă a programului este vîrful atunci există un număr pozitiv *Ic,* astfel încît $w(P_2)<w(P_1) - k$, unde P_2 este un vîrf arbitrar (care nu este soluție optimă) al poliedru- lui, iar w(P) este valoarea funcției obiectiv în punctul P. Evident, în orice vîrf valoarea funcției obiectiv nu crește cu mai mult de *k,* dacă e este suficient de mic. P_2 nu poate fi soluție optimă a programului „perturbat", pentru că nu a fost soluție optimă a programului inițial. Prin urmare, soluția programului modificat dă întotdeauna soluția programului inițial.

în general această metodă, deși folositoare (în special pentru demonstarea caracterului finit al algoritmului simplex), este greoaie, în special pentru că nu știm cît de mic trebuie ales e, astfel ca soluția programului modificat să rezolve și programul inițial. în cazul calculului automat calculatorul alege pivotul în mod aleator, atunci cînd există mai mulți pivoți posibili. Prin aceasta ciclarea se înlătură cu probabilitatea unu (deoarece ciclarea se produce numai atunci cînd există, o regulă fixă de alegere a pivotului).

3.6. EXEMPLE

Să considerăm acum cîteva exemple de rezolvare a unui program liniar cu metoda simplex.

3.6.1. Exemplu

$$\max (oa?! + 2x_2 + x_3)$$

*> De fapt, niciodată nu se rezolvă problema perturbată (și nici măcar nu se produce efectiv vreo perturbare). Pentru detalii vezi [3, 8], pp. 109 — 115. *(N.T.)* în ambele situații regulile din 3.5.1 nu pot fi aplicate. Vom arăta acum că în aceste situații programul nu are soluție optimă (adică este fie inconsistent, fie nemărginit).

Să presupunem că în etapa I există o linie cu ultimul element pozitiv și toate celelalte nenegative. Fie

$$\mathbf{S}_{1}^{tn} {}^{a}a^{r}i - {}^{b}i = - {}^{s}i \bullet \qquad (3.5.5)$$

ecuația corespunzătoare acestei linii. în baza ipotezei — b_j este pozitiv și toți a_{ij} și sînt nenegativi. Atunci trebuie să fie negativ și deci restricțiile sînt inconsistente.

Dacă în etapa II există o coloană, avînd ultimul element pozitiv și toate celelalte nepozitive, atunci r_t poate crește nemărginit (fiindcă 0, din (3.5.5) se vede că s, nu devine prin aceasta negativ; acest raționament este valabil pentru fiecare linie). Păstrînd nule celelalte variabile secundare r și crescînd r_t nedefinit, se obțin soluții admisibile, pentru care funcția obiectiv crește nemărginit (deoarece ultimul element al coloanei este pozitiv). Programul este deci nemărginit.

3.5.3. DEGENERAKE. în discuția precedentă am presupus că programul este nedegenerat, adică nu există elemente nule în ultima coloană a tabelelor simplex (exceptînd eventual ultimul element). Dacă programul este degenerat, atunci în locul inegalității stricte 3' >8 între valorile funcției obiectiv înainte și după o transformare a etapei II, demonstrată mai sus, se poate demonstra doar inegalitatea mai slabă 3'>3. Proprietatea 8'>3 înseamnă că funcția obiectiv crește la fiecare pas, deci în cursul etapei II nu se poate ajunge de două ori la aceeași soluție de bază, ceea ce garantează că algoritmul este finit. Inegalitatea 3'>8 nu exclude însă posibilitatea ca după mai multe iterații să se obțină un tabel simplex care a mai fost obținut anterior.

Degenerarea apare atunci cînd mai mult de m variabile sînt simultan nule, adică cînd mai mult de m dintre hiperplanele care mărginesc mulțimea soluțiilor admisibile

trec prin același punct. Un program este nedegenerat, dacă aceste *m*-|-*n* hiperplane au o poziție „nespecială” în spațiul m-dimensional. Un program degenerat se poate transforma într-un program nedegenerat printr-o „perturbare” arbitrar de mică a restricțiilor. O tehnică folosită des constă într-o astfel de perturbare a restricțiilor. Dacă o linie are ultimul element nul, adică are forma

$$|\ ^{a}li\ ^{a}2i \bullet \bullet \bullet\ ^{a}mi \circledR |- ^{s}i >$$

După cum am văzut, pentru orice $j\ j_0$ elementul — b_j se înlocuiește prin

$$- 6J = - \&. +$$

Avem însă — $bija^{\wedge}, < 0$, deci — &'■< — b_{jt} dacă < 0, iar dacă $a_{iaj} > 0$, atunci (în baza regulii) pentru orice $j >$ fc avem

$$- \frac{b_{j_0}}{a*0>} \geqslant A_-$$

Deoarece

$$- b'_j \quad a_{i_0 j} \left(- \frac{b_j}{a_{ioi}} + \frac{b_{i_0}}{a' <\&> 7} \right)$$

și expresia din paranteză este nepozitivă, rezultă — $b' < 0$. în sfîrșit —b_{io} se înlocuiește prin —$bjja^{\wedge}$, care este negativ prin ipoteză. Avem deci $b' < 0$ pentru toți $j>lz,$ și — $b'_k<$ — b_k. Deoarece există un număr finit de tabele simplex, prin aplicarea repetată a regulii se obține un tabel, în care — b_j <0 pentru orice Transformăm apoi tabelul, alegînd un pivot din linia cu —$b_k>0$ imediat următoare, și așa mai departe pînă cînd toate elementele ultimei coloane devin nepozitive.

într-o iterație din etapa II fiecare —se înlocuiește cu — &J<0, după cum am văzut mai sus. Elementul S al ultimei coloane se înlocuiește prin

$$8' = 8 + ^{\wedge} - \qquad (3.5.4$$

Deoarece $c_{ia} > 0$ și — $bjja_{iq}j_o$ <0, rezultă $8'>8.$ Noul program admisibil de bază dă deci funcției obiectiv o valoare mai bună (mai mare) decît precedenta. Deoarece mulțimea soluțiilor de bază este finită, soluția optimă va fi atinsă într-un număr finit de pași.

Am văzut deci că, pentru un program nedegenerat, efectuarea unui număr finit de pași (iterații) conform regulilor din 3.5.1 conduce la rezolvarea problemei. Se poate însă întîmpla ca la un moment dat regulile (3.5.1) sau (3.5.2) *să nu poată fi aplicate.* în etapa I este posibil ca o linie, avînd ultimul element pozitiv, să conțină numai elemente nenegative. în etapa II este posibil ca o coloană, al cărei ultim element este pozitiv, să conțină numai elemente

nepozitive.

Revenind la interpretarea geometrică, fiecăreia dintre variabilele ,x_m, îi corespunde în spațiul m-dimensional un hiper-
plan, care mărginește mulțimea soluțiilor admisibile, anume acela dat de anularea variabilei respective. Punctul de intersecție a m dintre aceste hiperplane (presupuse liniar independente) este o soluție de bază. Dacă celelalte variabile sînt nenegative, atunci aceasta este o soluție de bază admisibilă, adică un vîrf al domeniului soluțiilor admisibile.

în alegerea pivotului se urmăresc două scopuri. într-o primă etapă dorim ca, pornind de la o soluție de bază arbitrară, să ajungem la o soluție de bază admisibilă; în a doua etapă, pornind de la această soluție de bază admisibilă, determinăm succesiv un șir de alte soluții de bază admisibile, îmbunătățind (mărind sau micșorînd) cu fiecare dintre acestea valoarea funcției obiectiv, pînă la atingerea unei soluții optime. Vom da acum două reguli: prima pentru obținerea unei soluții de bază admisibile (fără ipoteze suplimentare), iar a doua pentru efectuarea unei iterații pentru obținerea unei soluții admisibile mai bune, pornind de la o soluție admisibilă dată. Numim aceste etape ale algoritmului etapa I, respectiv II.

3.5.1. Reguli pentru determinarea pivotului

Etapa I. Fie — b_k elementul pozitiv al ultimei coloane situat cel mai jos (exceptînd ultimul element). Se alege un element negativ arbitrar a,oi al liniei fc. Se consideră rapoartele negative — $b_f$la$_{iti}$ cu

fc, și fie j_0 unul dintre indicii j pentru care se atinge maximul acestor rapoarte. Atunci $a^{\wedge}$ se alege ca pivot.

(3.5.1)

Etapa II. Fie c,$_0$ un element pozitiv arbitrar al ultimei linii (exceptînd ultimul element). Dintre toți j pentru care — $bja^{\wedge}$ este negativ, fie j_0 un indice pentru care se atinge maximul acestor rapoarte. Atunci elementul $a^{\wedge}$ se alege ca pivot.

(3.5.2)

3.5.2. DEMONSTRAȚIA CONVERGENȚEI. Trebuie să arătăm că algoritmul descris mai sus conduce într-un număr finit de pași la o soluție optimă. Presupunem că problema este *nedegenerată,* adică în orice tabel simplex nu există elemente nule în ultima linie sau ultima coloană (exceptînd eventual ultimul element).

Pentru etapa I vom arăta că, prin transformare, elementul din linia k a ultimei coloane se micșorează și toate elementele ultimei coloane situate sub acesta rămîn negative. (3.5.

Coloana *i* a tabelului (3.4.5) reprezintă ecuația liniară

$$\mathbf{S} \qquad {}^{c}i -$$

unde v_t desemnează variabilele de bază, iar y_j variabilele secundare. Vrem să interschimbăm cu y_s, cu alte cuvinte, să transformăm y_t într-o variabilă de bază și *i*| într-o variabilă secundară. Pentru aceasta explicităm ecuația în raport cu y_f:

$$-\frac{a_{i1}}{a_{ij}}y_1 \qquad -\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}y_{j-1}+\frac{1}{a_{ij}}v_i+\ldots+\frac{c_i}{a_{ij}}=y_j.$$

înlocuind în celelalte ecuații pe *y,* prin această expresie, prima coloană devine (presupunem *i=fcl)*

$$\left(a_{11}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{ij}}\right)y_1+\ldots+\frac{a_{1j}}{a_{ij}}v_i+\ldots \quad \left(c_1-\frac{c_ia_{1j}}{a_{ij}}\right)$$

Celelalte coloane se obțin în mod similar. Transformarea poate fi descrisă prin schema

£ £

$$\text{----}s\ \frac{P\ P}{P}\ ,\ r\ ar\ P\ .$$

adică coincide cu (3.4.10). Ea transformă deci în mod echivalent atît restricțiile problemei inițiale, cît și cele ale problemei duale. Orice tabel simplex obținut prin aplicarea acestei transformări reprezintă deci o pereche de probleme duale.

3.5. ALGORITMUL SIMPLEX (continuare)

După ce am explicat operația de transformare a tabelului simplex — cea mai importantă operație a algoritmului simplex — avem nevoie acum de o regulă pentru determinarea pivotului, adică pentru stabilirea efectivă a transformării ce trebuie efectuată. într-un tabel simplex există multe elemente nenule, care în principiu pot fi alese ca pivot.

în care *p* este pivotul, *q* — un alt element din linia pivotului, *r* — un element din coloana pivotului și *s* este elementul situat în linia lui *r* și coloana lui *q.* Cu alte cuvinte, elementele tabelului simplex se modifică în felul următor: pivotul *p* este înlocuit cu *lip ;* celelalte elemente din această linie se împart prin *p,* iar elementele din coloana pivotului se împart prin *p* și li se schimbă semnul; din oricare alt element s se scade produsul elementelor *q, r* (definite mai sus) împărțit prin *p.*

3.4.5. Exemplu. Considerăm tabelul simplex :

4	1	*3*	2
*-1**	2	—	4
1	2	2	0
0	1	4	1

(3.4.1

care exprimă variabilele s_x, s_2, s_3, s_4 în funcție de r_x, r_2, r_3.

= - *1
=
— *3
= "Si

Vrem să exprimăm variabilele s_x, r_n s_3 s_4 în funcție de s_2, r_2, s_3. Pivotul este deci elementul din prima coloană și a doua linie. Efectuînd transformarea definită de (3.4.10) și interschimbînd)\ cu *s2,* se obține tabelul

4	9	-	1
—	—	1	—
1	4	1	4
0	1	4	1

Se verifică cu ușurință că sistemele atașate celor două tabele sînt echivalente.

3.4.6. INVARIANTA PROBLEMEI DUALE. Prin transformarea prezentată în 3.4.4 sistemul de ecuații reprezentat prin liniile unui tabel simplex se transformă într-un sistem echivalent. Am observat însă deja că un asemenea tabel reprezintă simultan două probleme duale. Vom arăta acum că, prin transformarea de mai sus a tabelului simplex, și sistemul reprezentat de coloanele tabelului se transformă într-unul echivalent.

3.4.4. DESCRIEREA UNUI PAS PIVOTAU. Un *pas pivotai* este o etapă a procesului de calcul care constă în interschimbarea unei variabile de bază a unui tabel simplex cu o variabilă secundară. Prin aceasta cele *m+1* ecuații (3.4.6) se explicitează în raport cu *n—1* dintre variabilele s_{jt} una dintre variabilele și *w.* Vom explica acum această operație.

Să presupunem că variabila de bază s_s devine variabilă secundară *(iese* din „bază", adică din mulțimea variabilelor de bază), iar variabila secundară este luată ca variabilă de bază *(intră* în bază) în locul acesteia. Explicitînd ecuația

$$^{a}li^{r}1 + {}^{a}2i^{r}2 + \cdots + {}^{a}mi^{r}m \sim \quad \sim\sim {}^{s}i$$

în raport cu — r,, se obține

$$^{a}a \qquad \cdots + {}'^{1,3} fi\, i + \qquad s,. + \ldots + {}^{mi} r_m \qquad {}^{\}} - \qquad r$$
$$a_{\{j} \qquad a_{i\}} \qquad a_{i\}} \qquad a_{i\}}$$

(presupunînd că '=/= 0). Această ecuație va reprezenta Jlinia *j* a unui nou tabel simplex. Pentru a determina celelalte linii ale acestui tabel, înlocuim în ecuațiile reprezentate de celelalte linii pe r_t conform acestei ecuații; de exemplu ecuația reprezentată de prima linie devine

$$\left(a_{11} - \frac{a_{1j}}{a_{ij}}\right) r_1 + \cdots + \left(a_{i-1,1} - \frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right) r_{i-1} - \frac{a_{1i}}{a_{ij}} s_j + \ldots$$

$$\ldots - \left(b_1 - \frac{b_j}{a_{ij}}\right)$$

Celelalte linii (exceptînd linia *j)* se calculează în mod similar. Noul tabel simplex se obține modificînd coeficienții conform ecuațiilor de mai sus și interschimbînd variabilele r_f și s,-.

Elementul $a_{\{j}$, presupus nenul, se numește *pivot* al transformării. Transformarea însăși se numește *pas pivotai.* Ea poate fi descrisă prin următoarea diagramă:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{q}{p} \\ \frac{-r}{p} & s - \frac{qr}{p} \end{bmatrix} \qquad (3.4.1$$

Vom da acum o metodă pentru obținerea — pornind de la (3.4.5)— a unui tabel (3.4.6) avînd proprietatea menționată că toate elementele ultimei coloane și ultimei linii (exceptînd eventual elementul 8) sînt nepozitive. Vom folosi următoarele definiții.

3.4.1. DEFINIȚIE. în tabelul simplex (3.4.6) variabilele *Sj* se numesc *variabile de bază,* iar r_t se numesc *variabile secundare.*

3.4.2. DEFINIȚIE. Soluția (3.4.7) — (3.4.8) atașată unui tabel simplex .(34.6) se numește *soluție de bază.* Aceasta se numește soluție de bază *admisibilă,* dacă toate elementele ultimei coloane sînt nepozitive, și soluție de bază *dual-admisibilă,* dacă toate elementele ultimei linii sînt nepozitive.

După cum am mai văzut, anulînd variabilele secundare ale unui tabel simplex în care elementele ultimei coloane sînt nepozitive, se obține o soluție admisibilă a problemei (3.2.1) — (3.2.3), ceea ce justifică denumirea de soluție de bază admisibilă. Dacă elementele ultimei linii a tabelului (3.4.6) sînt nepozitive, soluția se numește dual-admisibilă, deoarece i se poate asocia o soluție admisibilă a problemei duale. O soluție de bază care este simultan admisibilă și dual-admisibilă este o soluție optimă a problemei de maximizare.

Din punct de vedere geometric o soluție de bază admisibilă reprezintă un vîrf al poliedrului convex al soluțiilor admisibile ale problemei (3.2.1) — (3.2.3). După cum am menționat, ne interesează vîrfurile *vecine* ale acestui poliedru, adică cele unite printr-o muchie cu vîrful dat. Un vîrf se obține anulînd *m* dintre variabile (variabilele secundare). O muchie se obține anulînd numai *m—1* variabile. Deoarece o muchie trece printr-un anumit vîrf, dacă și numai dacă aceste *m—1* variabile sînt printre cele *m* variabile nule ale vîrfului, două vîrfuri sînt vecine (aparțin unei muchii), dacă și numai dacă aur»—1 variabile

secundare comune. Aceasta conduce la următoarea definiție.

3.4.3. DEFINIȚIE. Două soluții de bază se numesc *vecine (adiacente)* dacă reprezintă puncte diferite ale spațiului și dacă mulțimile variabilelor lor de bază diferă printr-un singur element.

Este posibil ca două soluții de bază, cu variabile de bază diferite, să reprezinte același vîrf. Aceasta se întîmplă cînd unele elemente din ultima coloană sînt nule : dacă unii b_5 sînt nuli, atunci s_j corespunzători se anulează dacă variabilele secundare se anulează. Acești s,- pot fi incluși între variabilele secundare fără ca prin aceasta soluția de bază să se modifice.

Să considerăm acnm problema de maximizare (3.2.1) — (3.2.3), ale cărei restricții (3.4.2) sînt reprezentate de liniile tabelului (3.4.5). Avem un sistem de $n + 1$ ecuații cu $m + n + 1$ variabile $x_{1j}.. .,x_m, u_{lf}... ,u_n, w.$ Folosind acest sistem, se pot exprima $n + 1$ dintre aceste variabile în funcție de celelalte $m.$ Tabelul (3.4.5), sau echivalent (3.4.2) , dă de exemplu reprezentarea variabilelor w în funcție de $x_{lf}.. .,x_m,$ dar oricare alte «+1 variabile se pot exprima în funcție de celelalte $m,$ exceptînd cazurile cînd aceasta ar necesita inversarea unei matrice singulare.

Să presupunem acum că am găsit o reprezentare a $n + 1$ variabile 8_n $s_2,..s_{„}$ w prin variabilele r_{lt} $r_2,...,$ $r_m,$ cu proprietatea că, în tabelul corespunzător elementele ultimei linii și ale ultimei coloane (exceptînd eventual elementul S) sînt nepozitive. Atunci tabelul (3.4.6) oferă soluția optimă a problemei de maximizare. Anume, anulînd variabilele $r_n.. . ,r_m,$ obținem $s,=\&_{;}->0,$ deoarece toți—b_j sînt nepozitivi. Deoarece toți s, sînt nenegativi și toți $r_{\{}$ sînt egali cu zero, acest punct este un program admisibil. Ultima linia a tabelului dă ecuația

$r-$	r'_2 .	T^f	**1**
<	^21	■	$- b\{\| = - s_1$
$^a1$	«22	•	^2 1 =
	«2n	•	$-K\| = -s_H$
ci	ci .	•	$8 \| = w$

(3.4.6)

$$w = rj + ... + c'_m r_n + ă$$

și, deoarece toți c< sînt nenegativi, este ușor de înțeles că valoarea maximă a lui w se obține atunci, cînd toți sînt zero. Soluția optimă a programului (3.2.1) — (3.2.3) este deci

$$= 0 \ (i = 1,..., m), \tag{3.4.7}$$

$$= \quad (j = l,...,n), \tag{3.4.8}$$

$$w = 8. \tag{3.4.9}$$

definește mulțimea soluțiilor admisibile. Aceste inegalități se mai pot scrie sub forma

$$a_{12}X_x + a_{22}X_2 + \ldots + a_{m2}X_m - b_2 = -u_2, \qquad (3.4.2)$$

unde *Uj (j=l,...,n),* numite *variabile ecart* (sau *variabile de egalizare),* iau doar valori nenegative. Inegalitățile (3.4.1) sînt transformate astfel într-un sistem de ecuații, cărora li se adaugă condițiile de nenega- tivitate ^>0, Convenim să reprezentăm sistemul (3.4.2) prin

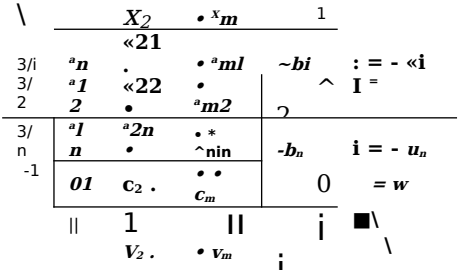
următoarea schemă :

în care toți coe				). Fiecare linie a
acestui tabel re				stemului (3.4.2);
aceasta se poat				nentele din linia
respectivă cu va				le sus a tabelului, (3.4.3)
în coloana core				uma obținută cu
variabila coresp				artea dreaptă a

tabelului. Avantajul acestei scheme constă în faptul că se evită scrierea repetată a variabilelor $x_{lt}..., x_m$. Funcția obiectiv $w = xC'$ *se* reprezintă sub forma unei noi linii

$$|\text{«i } c_2. \ldots c_{ro}\ 0\ I = w, \qquad (3.4.4)$$

adăugate în partea de jos a tabelului. Tabelul astfel obținut definește perfect programul liniar și poate fi folosit de asemenea pentru scrierea problemei duale (3.2.4) — (3.2.6), folosind coloanele sale pentru obținerea restricțiilor (3.2.5). Se obține astfel următorul tabel:



(3.4.

3.3.1. Exemplu, Pentru clarificarea celor de mai înainte con-siderăm programul cu restricțiile

$$x < 1,\ y < 1,\ 2x + 2y < 3,$$
$$x,y > 0.$$

în fig 3.1 mulțimea soluțiilor admisibile este haşurată, iar săgeata reprezintă gradientul funcției obiectiv. Pornind din origine, funcția obiectiv crește pe fiecare dintre cele două muchii adiacente. Același

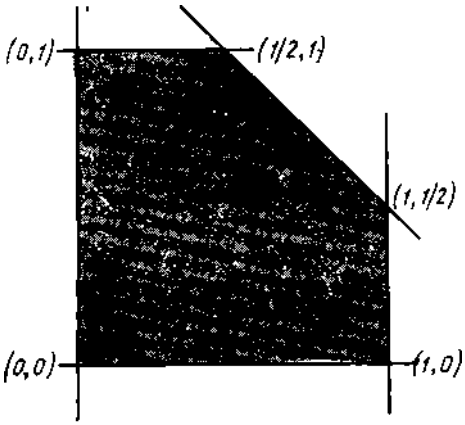


Fig. 3.1.

lucru se întîmplă în fiecare vîrf, exceptînd vîrful (1,1/2). Acest vîrf este deci soluția optimă a programului, deoarece funcția obiectiv descrește pe fiecare dintre muchiile adiacente.

3.4. ALGORITMUL SIMPLEX

Vom descrie acum algebric metoda prezentată mai sus. împreună cu condițiile de nenegativitate, sistemul de inegalități liniare

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m <$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m <$$

(3.4.1)

$$\text{«i„®i + «2n®2}\ 4\text{- • • • +}\ a_{mn}x_m < b_n$$

este inconsistent. Dacă însă membrul drept din (3.2.15) este negativ, atunci se arată în mod analog că programul (3.2.4) — (3.2.6) este nemărginit și (3.2.1) — (3.2.3) este inconsistent. Cu aceasta teorema este demonstrată.

3.3. REZOLVAREA PROGRAMELOR LINIARE

La prima vedere se poate crede că un program liniar se poate rezolva prin metodele analizei matematice, anulînd derivatele parțiale. Deoarece funcția obiectiv este liniară, derivatele sale parțiale sînt constante, și, în plus, soluția optimă este un punct al frontierei mulțimii soluțiilor admisibile, astfel că aceste metode clasice sînt inaplicabile. Metoda cea mai des folosită pentru rezolvarea unui program liniar, denumită metoda *simplex,* se bazează pe următoarele observații:

Mulțimea soluțiilor admisibile este un poliedru convex, deoarece este intersecția unui număr finit de semispații.

(3.3.1)

Deoarece mulțuimea soluțiilor admisibile este convexă și funcția obiectiv este liniară, orice punct de extrem local este un extrem global.

(3.3.2)

Deoarece f uncția obiectiv este liniară, extremul se atinge într-unul dintre punctele extremale {vîrfurile) ale poliedrului soluțiilor admisibile.

(3.3.3)

Din punct de vedere geometric metoda simplex constă în următoarele. Se determină mai întîi un vîrf al poliedrului soluțiilor admisibile (ceea ce, analitic, revine la rezolvarea unui sistem de *n* ecuații dintre restricțiile date). Se

examinează apoi muchiile poliedrului care pornesc din acest punct. Dacă valoarea funcției obiectiv nu mai poate fi mărită (micșorată) printr-o deplasare pe una dintre aceste muchii, atunci vîrful respectiv este un punct de maxim (minim) local și, conform cu (3.3.2), chiar un punct de extrem global. Dacă există o muchie pe care deplasarea produce o îmbunătățire, adică creștere (descreștere) a valorii funcției obiectiv, atunci această muchie se parcurge pînă în celălalt vîrf al său, unde se caută o nouă muchie pe care valoarea funcției obiectiv mai poate fi îmbunătățită. Deoarece poliedrul soluțiilor admisibile are un număr finit de vîrfuri și fiecare poate fi parcurs cel mult o dată în cursul aplicării metodei, soluția optimă se obține evident într-un număr finit de pași.

adică x^* și y^* sînt soluții admisibile ale programelor duale, și

$$y^* B^l.$$

Conform teoremei 3.2.1, este adevărată și inegalitatea contrarie, deci

$$x^* C^l = y^* B^l$$

și atunci, conform corolarului 3.2.2, x^* și y^* sînt soluții optime ale celor două programe.

Dacă însă s_{m+n+1} nu este pozitiv în nici o strategie optimă a jucătorului I, atunci, conform teoremei 2.4.4, jucătorul II are o strategie optimă $r = (r_u..., r_{n+m+1})$, al cărei produs scalar cu ultima linie a matricei este negativ. Deoarece mulțimile strategiilor optime ale jucătorilor I și II coincid, avem $r_{n+m+1} = 0$. Notînd

$$V = (r_{lf}. ..,r_{fl}),$$

$$^{x =} \mathbf{(\hat{}n + l, \bullet \blacksquare \bullet > \hat{}m + n)>}$$

se obține

$$— > 0,$$

$$yA^l \mathbf{> o,}$$

$$-yB^* + xC^* > \mathbf{0},$$

sau echivalent

$$xA < \mathbf{0},$$

$$> 0,$$

$$xC <> yB^{l}. \qquad (3.2.15)$$

în inegalitatea (3.2.15), fie membrul stîng este pozitiv, fie membrul drept este negativ. Să presupunem că xC^* este pozitiv și x' este program admisibil în (3.2.1) — (3.2.3). Atunci $x' + ax$ este program admisibil pentru orice a pozitiv și $(x' + ax)$ C‘ crește nemărginit odată cu a. Deci (3.2.1) — (3.2.3) este nemărginit și (3.2.4) — (3.2.6)

în primul dintre aceste cazuri se poate arăta, folosind faptul că mulțimile soluțiilor admisibile sînt închise, că ambele programe au soluții optime. Acest caz este analizat de următoarea teoremă fundamentală.

3.2.6. TEOREMĂ. *Dacă două programe duale sînt consistente, atunci ambele au soluții optime, x* și y*, și valorile programelor sînt egale, adică*

$$x^* C^{l} = By^{*l}.$$

Demonstrație. Considerăm jocul cu matricea

$$M = \begin{array}{r|c|c} / 0; & A^{1} & B \\ -A\ i & \mathbf{0} & C \\ V & -C & \mathbf{0} \end{array}$$

unde 0 desemnează matrice de dimensiunile potrivite, ale căror elemente sînt toate nule. Matricea M este strîmb simetrică, deci valoarea jocului este zero. Fies= (s_x, ..., s_{m+n+1}) o strategie optimă a jucătorului T. Notînd

$$y = (®1» \bullet \bullet \bullet >$$

$$x = (*» + l> \bullet \bullet \bullet» ®n+m)»$$

$$w — s\mathbf{n} + \mathbf{nH\text{-}l}$$

și ținînd seama că s este strategie optimă, conform cu (2.4.4) avem

$$— xA + toB > 0,$$

$$yA^{l} — wC > 0,$$

$$—yB^{l} + xC^{l} > 0.$$

Dacă w>0, atunci notînd $x^*= x/w$ și $y^* = yjiv,$ avem

$$x^*A < B,$$

$$y^*A <> C,$$

$$y^* > o,$$

Dacă $s_{n+1} = 0$, atunci

$$\sum_{Sj}^{n} > 0, \quad i = 1, m, i = i$$

și deci, pentru k destul de mare, avem

$$\sum_{i=i}^{n} a_{ij} (kSj) > Ci, \ i =$$

adică vectorul ks verifică restricțiile (3.2.5) și (3.2.6), deci programul
(3.2.4)— (3.2.6) este consistent. Dacă $s_{n+1} > 0$, atunci, notînd $y,- = s_s/s_{n+1}$, y satisface (3.2.5) și (3.2.6). Prin urmare, valoarea v a acestui joc este nenegativă.

Să presupunem acum că valoarea jocului este 0. Atunci în orice strategie optimă a jucătorului II avem $s_{n+1} = 0$ deoarece dacă jucătorul II are o strategie optimă s cu $s_{„+1} > 0$, atunci, punînd $y_f = s_t/s_{n+1}$, y este program admisibil în (3.2.4) — (3.2.6), ceea ce contrazice ipoteza. Atunci, din (2.4.4) dacă r>0 și din teorema 2.4.4 dacă r=0, rezultă că jucătorul I are o strategie $t = (t_n. .., t_m)$ care satisface condițiile

$$\sum_{i=1}^{ni} (- «o) \ U > o, j = i,.$$

$$\sum_{1=1} Ci\ ti > o.$$

Prin ipoteză programul (3.2.1) — (3.2.3) are o soluție admisibilă *x.* Pentru orice număr pozitiv a, vectorul *x + a.t* este de asemenea soluție admisibilă. în

$$(x + \text{ai})\ C^* = xC^1 + atC^1$$

expresia din partea dreaptă poate fi făcută arbitrar de mare, dacă a se alege suficient de mare. Prin urmare, programul (3.2.1) — (3.2.3) este nemărginit. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Pentru o pereche de probleme duale este posibilă deci numai una dintre următoarele situații :

1) ambele programe sînt consistente și mărginite;
2) un program este inconsistent, iar celălalt nemărginit;
3) ambele programe sînt inconsistente.

3.2.4. Exemplu. Programele duale

$$\max (5\text{®}_x + x_2)$$

cu restricțiile

$$x_1 — x_2 < 1,$$

$$— x_2 + x_2 < —2,$$

$$*1\text{^}2\ 0,$$

Ș*

$$\min (y_x - Zy_2)$$

cu restricțiile

$$Vi - Vi > 5,$$

$$-Vi + 3/2 > 1,$$

$$3/i,\ 3/2 > 0$$

sînt ambele inconsistente.

Prin urmare, dualul unui program inconsistent poate fi fie inconsistent, fie nemărginit. Vom arăta acum că acestea sînt singurele posibilități.

3.2.5. TEOREMĂ. *Dacă un program liniar este consistent, iar dualul său este inconsistent, atunci programul este nemărginit.*

Demonstrație. Să presupunem că (3.2.1) — (3.2.3) este consistent și (3.2.4) — (3.2.6) este inconsistent. Considerăm jocul cu matricea de dimensiune *m* x (n-[-l)

(- A i C^{z}),

(3.2.14)

obținută adăugind vectorul coloană C‘ la matricea —*A.* Presupunînd că valoarea jocului este negativă, avem, pentru orice strategie optimă « = (s$_{x}$,..., s„, s„$_{+1}$) a jucătorului II,

$$-\sum_{n} a_{\text{„}}\, s_s + Ci\, s_{B+1} < 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

și, după cum se vede cu ușurință, această problemă este echivalentă cu problema inițială (3.2.1) — (3.2.3). Dualul programului dual al unei probleme date este deci însăși această problemă. Dualitatea este astfel o relație simetrică. Fiecare dintre programele (3.2.1) — (3.2.3) și (3.2.4) — (3.2.6) este deci dualul celuilalt.

3.2.1. TEOREMĂ. *Dacă x și y sînt soluții admisibile ale programelor* (3.2.1) — (3.2.3), *respectiv* (3.2.4) — (3.2.6), *atunci*

$$xC^{l} < By'. \qquad (3.2.13)$$

Demonstrație

$xC^{l} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right)$ = (conform cu (3.2.3) și (3.2.5)) «=i

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right) < By^{l}$ (conform cu (3.2.2) și (3.2.6)).

3.2.2. COROLAR. *Dacă x și y sînt soluții admisibile ale programelor* (3.2.1) — (3.2.3), *respectiv* (3.2.4) — (3.2.6) *și dacă xC^{l} = By^{l}, atunci x și y sînt soluții optime ale acestor programe.*

Nu orice program liniar are soluție optimă. De exemplu restricțiile pot fi inconsistente, adică mulțimea soluțiilor admisibile poate fi vidă. în acest caz spunem că programul este *inconsistent.* Este posibil ca un program să fie *consistent,* dar să nu existe maxim (minim), deoarece funcția obiectiv nu este mărginită pe mulțimea soluțiilor admisibile. De exemplu, programul max *2x* cu condițiile — *x* 1, *x>0* nu are soluție optimă, deoarece funcția obiectiv nu este mărginită superior. Astfel de programe se numesc *nemărginite.* Din teorema de mai înainte rezultă imediat și următorul corolar.

3.2.3. COROLAR. *Dacă un program liniar este nemărginit, atunci programul său dual este inconsistent.*

Demonstrație. Să presupunem de exemplu că (3.2.1) — (3.2.3) este nemărginit. Dacă programul dual este consistent, adică admite o soluție admisibilă *y,* atunci, conform teoremei 3.2.1, funcția obiectiv xC^1 este mărginită superior de *By',* ceea ce contrazice ipoteza.

Afirmația inversă nu este în general adevărată : dacă un program este inconsistent, nu rezultă că dualul său este nemărginit. Anume, este posibil ca ambele programe să fie inconsistente.

Considerăm următoarele două programe liniare :

max *x(A*	(3.2.1)
cu restricțiile	
xA < B,	(3.2.2)
x > 0	(3.2.3)
Și	
min *By'*	(3.2.4)
cu restricțiile	
$yA^{l} > C,$	(3.2.5)
y > o.	(3.2.6)

Programul (3.2.4) — (3.2.6) se numește *program dual* al lui (3.2.1) —
— (3.2.3). Programul dual se poate scrie în mod echivalent ca o problemă de maximizare asemănătoare celei inițiale :

max *y(— B)'* (3.2.7)

cu restricțiile

y (-A') < -C, (3.2.8)

y > **o.** (3.2.9)

Duala acestei probleme, conform definiției programului dual, este

min (— *C)* (3.2.10)
x^{1}

cu restricțiile

x (— A) > — *B,* (3.2.11)

prin două inegalități contrarii și o variabilă fără restricții de semn se poate scrie ca diferență a două variabile nenegative. De aceea (3.1.1)— — (3.1.3) se poate considera ca formă generală a unui program liniar.

3,1.1. DEFINIȚIE. Mulțimea tuturor punctelor *x* care satisfac restricțiile (3.1.2) și (3.1.3) se numește *mulțimea soluțiilor admisibile* a problemei. Maximul funcției obiectiv pe mulțimea soluțiilor admisibile se numește *valoarea programului.*

Vrem să arătăm că rezolvarea unui joc matriceal se poate reduce la rezolvarea unui program liniar. Dacă jucătorul I folosește strategia *(x*$_v$*.. .,x*$_m$*),* atunci cîștigul său mediu este un număr X, care satisface inegalitățile

$$\sum_{i=1}^{m} a_{tl} > X,\ j =$$

Determinarea unei strategii optime pentru jucătorul I înlocui deci cu rezolvarea următorului program liniar : se poate

$$\max X \qquad (3.$$

cu restricțiile

$$-\sum \text{«0 } x_i + X < 0,\ j = 1,.. .,\ n,\ i = l \qquad (3.1.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = i, \qquad (3.1.9)$$

$$x_f > 0,\ i \text{ -- } 1,\ldots,\ m. \qquad (3.1.10)$$

Pentru jucătorul II problema se formulează ca

$$\min g \text{ cu restricțiile} \qquad (3.1.11)$$

$$\sim \sum_{2=1}^{n} a_{<i}\, V_j + P_{-} > 0,\ i = 1, \qquad m, \qquad (3.1.12)$$

$$\sum_{3=1}^{n} E\,\% = 1, \qquad (3.1.13)$$

$$Vi > 0,\ j = 1,\ldots,\ w. \tag{3.1.14}$$

PROGRAMARE LINIARĂ

3.1. INTRODUCERE

O problemă de programare liniară *(program liniar)* constă în maximizarea sau minimizarea unei funcții liniare (numită *funcție obiectiv)* cu restricții liniare. De obicei aceste restricții sînt inegalități și condițiile ca variabilele să aibă valori nenegative. Cea mai folosită formă este următoarea : să se determine $(x_v... , x_m)$ care maximizează funcția liniară

$$\sum_{t=1}^{m} c_i \qquad (3.1.1)$$

și satisfac

$$< bj,\ j = 1,\ldots, \qquad (3.1.2)$$

$$x <> \qquad (3.1.2)$$

sau, în scriere

$$\max\ xC^{l}, \qquad (3.1.3)$$

$$xA < B,$$

$$x\ 0. \qquad (3.1.4)$$

Această formă nu reprezintă cel mai general program liniar. Uneori funcția obiectiv nu trebuie maximizată, ci minimizată, iar unele dintre restricții pot fi egalități. O parte din variabile pot lua și valori negative. Aceste probleme se pot însă reduce la forma de mai sus, deoarece minimizarea unei funcții este echivalentă cu maximizarea aceleiași funcții luate cu semn contrar, o egalitate se poate înlocui

9. *(Soluție prin joc fictiv).* Să considerăm pentru un joc matriceal $A = (a_{ij})$ următorul proces. Doi jucători joacă acest joc de un număr mare de ori. La Început ei folosesc strategii pure arbitrare. Să presupunem că in primele k partide jucătorul I a folosit strategia sa i de X_t ori (i = 1,..., m) și jucătorul II strategia sa j de Y* ori (j = 1.....n). în a (Jt + l)-a partidă jucătorii I și II vor alege strategiile lor ij.$_{+1}$, respectiv j_k+_v astfel Incit

$$\}^{2} \quad {}^{3}\,{}^{Yk}i = maX\,{}^{2}\,{}^{i\,i} \quad {}^{Y}{}_{J} = Ujt'$$

$$\sum_{i} {}^{a}i.i_{k+1} = \min_{\hat{i}\ \mathbf{i}} \sum {}^{\circ}ii^{x}i = {}^{v}k>$$

адică, in fiecare joc ulterior, fiecare jucător se comportă in mod optim in raport cu ansamblul tuturor alegerilor precedente ale oponentului. Arătați că oriçe pereche de puncte de acumulare ale șirurilor *{Xkfk},* respectiv {Y*=/Âr}, este o soluție a jocului A.

a) Spunem că linia i_0 „se potrivește in intervalul [A, A']“ dacă există k_2 astfel ca 5*

$$Ș\ ay\ Y^{\wedge} = {}_{Uki}.$$

Analog, coloana j_0 se potrivește in [A, A'], dacă există k_2 astfel ca $k^{\wedge}k_2{}^{\wedge}k'$

și

$$\sum_{i} = Vk_{,}.$$

Dacă toate liniile matricei A se potrivesc in intervalul [A:, Z], atunci avem

$$v, - v_t < 4a\,(k\text{-}l),$$

unde a = max]ay|.

b) Pentru orice e> 0 există k_t astfel ca Vj— U_k^ke pentru orice k^k_0. Demonstrația se face prin inducție după dimensiunile matricei A. Dacă A este o matrice lxl, nu este nimic de demonstrat. Să presupunem că afirmația este adevărată pentru toate sub- matricele A din A. Se alege atunci A* astfel ca Vt* — U_k* $ke/2$, pentru orice A. Atunci k_9> $8ak*/e$ satisface condițiile de mai sus. (Arătați că orice linie sau coloană, care nu se potrivește intr-un interval dat, poate fi înlăturată din matricea A pentru acest interval și ne putem mărgini doar la studiul submatricei astfel rezultate. Considerați intervale de forma (A, A+A*) cu A+A*^A_0.)

a) Produsul lui x cu orice coloană din M aparținlnd lui M este egal cu v.

b) Produsul lui y cu orice linie din M aparținlnd lui M este egal cu v.

c) Dacă Xj> 0 și y_j> 0, atunci linia i și coloana j a matricei M aparține lui hi.

d) Respectlnd condițiile din a) și b), se pot adăuga la M linii și coloane, atita timp cit acestea rămin liniar independente.

e) Dacă liniile matricei astfel construite sint liniar dependente, atunci x nu este un punct extremal. Dacă coloanele ei slnt liniar dependente, atunci y nu este punct extremal.

7. Fie A = $\{dij\}$ o matrice strîmb simetrică și x = ($x_{l(}$... ,x_m) o strategie mixtă. Notlnd

$$\sum_{7=1}^{m} \quad \text{?(“<)} = max$$

$$i=l^{\circledR(x)} = \sum_{i=l}^{m} ?(\text{“»}) \bullet W^{1})$$

arătați că, pentru orice „strategie inițială” $x°_t$ soluția sistemului de ecuații diferențiale

$$\frac{dx^*}{dt}^{1} = ?(\text{««}) - \quad \circledR(x),\ x(0) = x\text{»}$$

converge către o strategie optimă, in sensul că are puncte de acumulare și fiecare dintre aceste puncte de acumulare reprezintă o strategie optimă.

a) Dacă x° este o strategie, atunci $x(l)$ este o strategie pentru orice t.

b) Funcția ip satisface ecuația

$$= — 2\circledR(x)di(x).$$

dt

c) $4K^{1})\ \ ®^{2}(x)$.
d) Din (b) și (c) rezultă

$$* \text{ '+1IW)}^{!}$$

8. Fie A = $(a_{\{i}$ o matrice m X n. Considerăm matricea $B = (b_{p(l}$, de dimensiune *mn* x *mn,* definită prin

$$^{6}\text{(i-l)n+f. } (k - \text{i)n + l} = {}^{a}il \sim {}^{a}kf$$

Arătați că B este strlmb simetrică și deci definește un joc simetric. Arătați apoi că, dacă X = este o strategie optim ă a jocului B, atunci vectorii x și *y* cu componentele

$$x_I = \sum_{3=1}^{n}$$

$$uj = \sum_{i=1}^{m} \text{\i-l)n+J}$$

sini strategii optime pentru jucătorii I și II în jocul A.

sa strategie pură. Prin urmare, o strategie optimă x trebuie să aibă toate componentele pozitive. Aceasta este valabil și pentru strategiile optime ale jucătorului II. Un raționament asemănător celui din 2.5.5 arată că o strategie optimă x trebuie să satisfacă următorul sistem de ecuații liniare :

$$— x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$x^{\wedge} \sim \text{H } 3\hat{a}7_2 — 0,$$

$$—2x_r + 3<r_2 \quad = 0,$$

$$a?i + x_2 + x_3 = 1.$$

Soluția acestui sistem este (1/2, 1/3, 1/6). Aceasta este strategia optimă unică pentru ambii jucători.

PROBLEME

1. Arătați că*> pentru orice punct x al frontierei unei mulțimi convexe C există un vector p =/= 0 cu proprietățile SzjPj — 0 și S y_tPi >■ 0 pentru toți y e C. (Afirmația este o variantă mai tare a teoremei hiperplanului de separare, Ierna 2.4.2. Folosind această Iernă, arătați că, dacă x aparține frontierei lui $C,$ există un șir de puncte $x^n\$C,$ care converge către $x.),$

2. Arătați că mulțimea strategiilor optime este convexă, Închisă și mărginită, și deci coincide cu acoperirea convexă a punctelor sale extremale.

3. Arătați că valoarea unui joc matriceal este o funcție Continuă de joc, dacă un joc matriceal m x n este considerat ca un punct al spațiului m x n-dimensional.

4. Arătați că mulțimea strategiilor optime ale unui joc este o funcție inferior semicon- tinuă de matricea jocului.

5. Arătați că mulțimea jocurilor matriceale m x n cu strategii optime unice este o submulțime deschisă densă a spațiului m x n-dimensional.

6. Fie M un joc matriceal cu valoare zero și fie x și y puncte extreme ale mulțimilor strategiilor optime ale celor doi jucători. Arătați că există o submatrice nesingulară M a lui $M,$ astfel incit

$$\text{---------}_f yT = \frac{j\,M\sim^{J}}{\blacksquare\ M\sim^{1}J^{l}}, \qquad V = \frac{\text{----------}}{J\,M\sim Ij'}$$

unde j este vectorul de dimensiune corespunzătoare, cu toate conponentele egale cu 1.

*> Acest enunț este fals. Enunțul corect este : pentru orice punct x al frontierei unei mulțimi convexe C există un vector p 0 și un număr real a astfel ca SzjPj = a și S $UiPi$ [a] pentru orice yeC. *(N. T.)*

și deci icAa;[1] = 0. Pentru orice x avem

$$\min_{v} xAy^* < 0,$$

și deci valoarea jocului este nepozitivă; analog pentru orice

$$y \text{ avem } \max_{v} yAx^1 \ 0,$$

și deci valoarea jocului este nenegativă. Prin urmare, valoarea jocului este nulă. Dacă y este o strategie optimă pentru jucătorul I, atunci conform cu (2.4.4), avem

$$xA > 0.$$

Aceasta înseamnă însă $x($ — A*) > 0, adică $xA^1 < 0$, sau încă

$$Ax^1 < 0$$

și deci, conform cu (2.4.5), x este strategie optimă pentru jucătorul II.

Pentru rezolvarea jocurilor simetrice a fost dezvoltat un algoritm asemănător celui descris în 2.5.10. în contrast cu metoda din 2.5.10, care oferă un șir discret de strategii, acesta se bazează pe o modificare continuă a unei strategii date, prin care se aproximează strategia optimă. Aplicabilitatea acestei metode, dată de von Neumann și Brown, este totuși foarte mărginită (exceptînd faptul că dă o demonstrație constructivă de existență în teorema minimax), deoarece implică rezolvarea unor ecuații diferențiale care în general nu pot fi integrate analitic.

2.6.3. Exemplu. Să considerăm jocul matriceal

V 2 -3 0 /

Deoarece matricea este strîmb simetrică, valoarea jocului este — după cum am văzut — zero. Jocul nu are nici un punct șa. Mai mult, o strategie optimă nu poate folosi numai două strategii pure, deoarece o strategie mixtă a jucătorului I cu, de exemplu, ^>0, a>$_2$>0 și x_3 = 0 dă un cîștig mediu negativ, dacă jucătorul II folosește prima

astfel incit să minimizeze unde p_i este numărul de jocuri
în care jucătorul I a folosit strategia sa pură *i.*

Oricît de naivă ar părea această metodă, ea furnizează un șir de repartiții empirice care converg către strategia optimă. Mai exact, fie pf numărul de partide în care jucătorul I folosește strategia sa *i* în cursul primelor *N* partide. Notînd *x? = p^/N,* vectorul x^N = = *(KirDz, ■ • ®m)* este evident o strategie mixtă (unde *m* este numărul
strategiilor pure ale jucătorului I). Șirul de strategii x^N nu este neapărat convergent, dar conține un subșir convergent, deoarece toate punctele sale aparțin mulțimii compacte a tuturor strategiilor mixte. Esențial este aici faptul că *limita oricărui subșir convergent reprezintă o strategie optimă.*

Renunțăm la demonstrarea acestei afirmații, deoarece este destul de complicată. Ea se bazează pe faptul că strategiile celor doi jucători x^N și y^N, determinate ca mai sus, au proprietatea

$$\lim \{v(y^N) - v(x^N)\} = 0. \qquad (2.5.25)$$
2V-+oo

Această metodă este deosebit de folositoare pentru jocuri de dimensiuni mari, adică cu un număr mare de strategii pure, care datorită proporțiilor lor sînt greu de tratat în alt mod. (Pentru demonstrarea afirmației, vezi problema 2.9.)

2.6. JOCURI SIMETRICE

încheiem acest capitol cu o scurtă discuție a unei clase speciale de jocuri.

2.6.1. DEFINIȚIE. O matrice pătrată $A = (a^)$ se numește *strîmb simetrică,* dacă $a_{jt} = — a_{jt}$ pentru toți *i* și *j.* Un joc matriceal se numește *simetric,* dacă matricea sa este strîmb simetrică.

2.6.2. TEOKEMĂ. *Valoarea unui joc simetric este* **0.** *Orice strategie optimă pentru jucătorul* **I** *este de asemenea optimă pentru jucătorul* **II.**

Demonstrație. Fie A un joc matriceal și a; o strategie mixtă arbitrară a jucătorului I. Din $A = — A'$ rezultă

$$xAx^1 = — xA^lx^* = — (xAx^1)^1 = — xAx^1$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor liniare $(a_{2j} — a_{li})x_2 + a_{lf}$ este simplă, fiecare fiind dreapta determinată de punctele $(0, a_{lj})$ și $(1, a_{2j})$. Funcția $v(x)$ este reprezentată în fig. 2.1 printr-o linie îngroșată. Punctul cel mai înalt X al acesteia este punctul de intersecție al dreptelor corespunzătoare coloanelor a doua și a treia. Abscisa acestui punct este 2/7, iar ordonata 17/7. Avem deci strategia $x = = (5/7, 2/7)$ și valoarea jocului $v= 17/7$. Aceste valori pot fi calculate și prin folosirea formulelor (2.5.22) și (2.5.24) pentru jocul matriceal 2x2 format din coloanele a doua și a treia ale matricei date. Folosind formula (2.5.23) pentru aceeași matrice, se mai obține $y = (0, 5/7, 2/7, 0)$. Se poate verifica cu ușurință că x, y, v astfel obținute sînt intr-adevăr strategii optime și, respectiv, valoarea jocului.

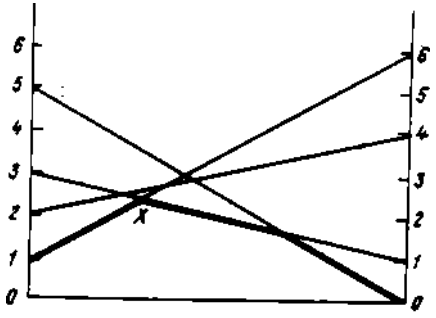


Fig. 2.1.

Astfel am rezolvat problema celor mai simple tipuri de jocuri. Sînt posibile generalizări ale acestei metode și pentru alte jocuri, dar, datorită volumului mare de calcule, fără însemnătate practică. Vom trata acum una dintre cele mai simple metode generale, fără a da demonstrațiile afirmațiilor făcute, care pot fi găsite în literatura de specialitate.

2.5.10. SOLUȚIE PEIN JOC FICTIV. Să presupunem că doi jucători, care poate nu au cunoștințe de teoria jocurilor, se hotărăsc să joace un anumit joc de un număr mare de ori. Deși jucătorii nu cunosc teoria jocurilor, ei au înclinații spre o analiză statistică și își notează strategiile pure folosite de adversar în șirul de partide. în fiecare partidă, fiecare jucător încearcă să maximizeze cîștigul său mediu în raport cu repartiția de probabilitate empirică observată la adversar pînă în acel moment; adică, dacă jucătorul II a folosit diversele sale strategii pure j respectiv de ori, atunci jucătorul I alege strategia sa pură i astfel încît să maximizeze ^{a}u • Analog, jucătorul II alege j

2.5.7. Exemplu. Căutăm soluția jocului matriceal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Evident, jocul nu posedă nici un punct șa. Matricea adjunctă a lui *A* este

$$A* = (1\ i)^{Și\ ,A1\ =2',\ JA*\ =(3',1)'}$$

$$A*J< = (\ 2\ )\ _{și}\ J_A*JI\ _{=4}$$

Obținem astfel

$$x = \left(\frac{3}{4}, \quad \frac{1}{4}\right), \quad y = \left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right), \quad v = \frac{1}{2}$$

Se verifică cu ușurință că aceste strategii *x* și *y* dau într-adevăr un cîștig 1/2.

2.5.8. JOCURI 2 x *n* și *m,* x 2. Pe lingă jocurile 2 x 2 se pot rezolva cu ușurință jocurile de tipul 2 x *n* și *mx2,* în care cel puțin unul dintre jucători posedă numai două strategii pure. Vom analiza acum jocurile 2 xn. Jocurile *m,* x 2 se tratează în mod asemănător. Sarcina primului jucător este de a maximiza

$$r(a?) = \min \qquad + a_{2j};r_2\}$$

sau, deoarece $x_r = 1 — x_2$,

$$v(x) = \min\ \{(a_{2j} — a_{li})x_2 + o\hat{}\}.$$

Prin urmare, *v(x)* este minimul a *n* funcții liniare de variabila x_2. Acestea pot fi reprezentate grafic și, în graficul obținut, minimul lor *v(x)* se maximizează cu ușurință.

2.5.9. Exemplu. Considerăm jocul matriceal

2 3 15 1
4 1 6 o]'

și

$$JA'^{1} \quad (2.5.17)$$
$$JA'^{1}\ \mathrm{X}$$

Asemănător se obține

$$\mathrm{A}^{-1}\ \mathrm{J}^{(} \quad (2.5.18)$$
$$JA'^{1}J^{t}\ '$$

Dacă matricea *A* este singulară, aceste expresii nu au desigur nici un sens. Se vede însă cu ușurință că

$$= {}^{JA*} \quad (2.5.19)$$
$$''\ \mathrm{J}\overline{\mathrm{A}^{*}}\mathrm{J}'$$

Ș

$$\text{»} \quad {}^{A*Jl} \quad (2.5.20)$$
$$-''\overline{JA}^{*}J^{l}$$

(unde A^* este matricea adjunctă a lui A) reprezintă strategii optime.

Dacă A este nesingulară, atunci (2.5.19) și (2.5.20) coincid respectiv cu (2.5.17) și (2.5.18).

Indiferent dacă A este singilară sau nu, obținem apoi valoarea jocului

$$v = {}^{|A|}. \quad (2.5.21)$$
$$\mathrm{J}\dot{\mathrm{A}}^{*}\mathrm{J}'$$

unde |A| reprezintă determinantul lui A. Am demonstrat astfel următoarea teoremă.

2.5.G. TEOREMĂ. *într-un joc matriceal A,* de dimensiune 2x2, *fără punct șa, strategiile optime unice și valoarea jocului sînt date de*

$$JA^{*} \quad (2.5.22)$$
$$JA^{*}J>\ '$$

$$A^{*}J^{l} \quad (2.5.23)$$
$$JA^{*}J^{l}\ '$$

$$\frac{|\mathrm{A}|}{JA^{*}J'} \quad (2.5.24)$$

unde A este matricea adjunctă a lui A,* [A [*determinantul lui A și J este vectorul* (1, 1).

fiindcă ^>0 și a^+a^l, rezultă că membrul întîi din (2.5.5) este mai mic ca *v.* Prin urmare, ambele expresii în membrul din (2.5.5) trebuie să fie egale cu *v,* adică

$$\text{«ii } Vi + \text{«12 } 3/2 = \tag{2.5.8}$$

$$\text{«212/i + «22 } 3/2 = \tag{2.5.9}$$

în mod similar se obține

$$\text{«ii^i + } a_{21}x_2 = v, \tag{2.5.10}$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = \tag{2.5 .11}$$

sau, în scriere matriceală :

$$= \tag{2.5.12}$$

$$xA = (v, v). \tag{2.5.13}$$

Aceste egalități, împreună cu

$$\text{®i + ®2} \qquad = 1\text{»} \tag{2.5.14}$$

$$3/\text{i} + 3/2 \qquad = 1, \tag{2.5.15}$$

permit calculul lui *x, y* și *v.* Anume, dacă *A* este nesingulară, avem

$$x = vJA\sim|$$

unde J = (1,1). Eliminînd acum *v* și observînd că suma componentelor lui *x,* adică *xJ*,* este egală cu 1, obținem

$$vJA^{-1}J^{l} = 1,$$

sau

$$\frac{1}{} \tag{2.5.1}$$

$JA \sim ' J'$

în această matrice se observă că linia a treia domină prima linie. Înlăturînd prima linie, obținem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

și, fiindcă acum coloana a treia este dominată de a doua, matricea se reduce în sfîrșit la

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, este suficient să căutăm strategii optime doar pentru jocul redus 2x2. în paragraful următor sînt tratare astfel de jocuri 2 x2.

2.5.5. JOCUKI 2x2. Considerăm jocul matriceal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Dacă acesta are un punct șa, rezolvarea sa este banală. Dacă jocul nu posedă însă un punct șa, atunci strategiile optime $x=(x_v\ x_2)$ și $y = (^j,\ i/_2)$ trebuie să aibă toate componentele pozitive. Dacă valoarea jocului este *v,* avem

adic «11^13/1 4“ «12^13/2 4“ «21 ^2^1 4- «22^23/2 —
J"i(«n3/i + «123/2) 4- «₂(«213/1 4- «223/2) = V- (2.5.5

Deoarece *y* este prin ipoteză o strategie optimă, fiecare dintre expresiile din paranteze este cel mult egală cu *v.* Presupunînd că una dintre ele este strict mai mică ca *v,* de exemplu

«11 3/1 4- «12 3/2 < V, (2.5.6)

«21 3/1 4- «22 3/2^

Și

$$^{a}u > {}^{a}ki \text{ pentru cel puțin un } j. \qquad (2.5.2)$$

Analog spunem că coloana j domină coloana l, dacă

$$^{a}u < {}^{a}u \text{ pentru cel puțin un } i. \qquad (2.5.4$$

$$a_{ij} < a_{il} \text{ pentru toți } i \qquad (2.5.3$$

S

Pe scurt, o strategie pură (reprezentată printr-o linie, respectiv coloană) domină o altă strategie, dacă este cel puțin la fel de bună ca aceasta și în unele cazuri mai bună. Prin urmare, un jucător nu va folosi strategii dominate, ci va lua în considerare numai strategiile sale nedominate.

Teorema următoare, pe care o dăm fără demonstrație, exprimă mai exact aceasta.

2.5.3. TEOREMĂ. *Fie A un joc matriceal în care liniile i_{lt} $i_2,\ldots,i_k$ sînt dominate. Atunci jucătorul* **I** *posedă o strategie optimă x cu $x_{ii}=Xi_2 = \ldots = x_{ik}=$* **0.** *în plus, orice strategie optimă a jocului „redus", obținut din jocul inițial prin înlăturarea liniilor dominate, completată cu componente nule pentru liniile înlăturate, este o strategie optimă a jocului A.*

O propoziție similară se poate da pentru dominarea coloanelor. Aceste teoreme fac uneori posibilă o micșorare a matricei date prin înlăturarea liniilor și coloanelor dominate.

2.5.4.Exemplu. în jocul matriceal

$$\begin{matrix} i2\,0 & 1 & 4\backslash \\ 1 & 2 & 5\ 3 \\ \backslash 4 & 1 & 3 \quad V \end{matrix}$$

coloana a doua domină pe a patra. Jucătorul II nu va folosi deci niciodată a patra dintre strategiile sale. Aceasta poate fi deci eliminată, obținîndu-se matricea

R
\4 1 3/

Și

$$\sum_{t=i}^{m} ?,(-«<.) \quad <0- \qquad (2.4.10)$$

Din (2.4.8) rezultă $q_t > 0$ pentru toți *i,* iar din (2.4.10) rezultă că $q<$ nu sînt toate nule. Putem deci defini

și din (2.4.9) și (2.4.10) rezultă imediat că *x* este o strategie optimă pentru jucătorul I, cu £ > 0.

Fie acum rc(A) = *k=/=Q.* Considerăm jocul cu matricea $B = (b_{ij})$, unde $b_{ij} = a\hat{} — k$, și demonstrația continuă ca aceea a teoremei 2.4.1.

2.5. CALCULUL STRATEGIILOR OPTIME

Teorema 2.4.1 (teorema minimax) garantează existența strategiilor optime în jocuri de două persoane cu sumă nulă. Demonstrația dată nu este însă una constructivă, adică nu arată modul cum pot fi calculate aceste strategii.

Descriem aici cîteva metode pentru soluția unor jocuri foarte simple. în capitolul 3 vom discuta o metodă de rezolvare mai generală.

2.5.1. PUNCTE ȘA. Cel mai simplu caz este acela cînd există un
punct șa, adică cînd există un element a_{ij} care este maxim în coloana sa și minim în linia sa. în acest caz strategiile optime pentru I, respectiv II sînt strategiile pure *i* și *j* sau, echivalent, strategiile mixte *x* și *y* cu a?, = 1, = 1 și celelalte componente nule.

2.5.2. DOMINARE. Spunem că linia *i* a matricei *A* *domină* [linia *k,* dacă

Vom demonstra acum teorema 2.4.4. Să presupunem pentru moment că ®(A) = 0. Considerăm următorii *m*-|-*n m*-vectori :

$$= (1, 0,\ldots ,0),$$

$$€_2 — (0,1, \bullet \bullet \bullet ,0),\ e_m = (0,0,\ldots,1),$$

$$^{a}\mathbf{i} = \quad (®11» {}^{a}21, \blacksquare \bullet \bullet 1$$

$$^{a}n\text{-}l — (®l.n\text{-}l > °2,n\text{-}l > \bullet \bullet \bullet, {}^{a}m,n\text{-}l)$$

$$^{a}n^{=} ({}^{a}in> {}^{a}2n>\text{-} \bullet \qquad {}^{a}mn)'$$

Sînt posibile următoarele două situații: — a_n aparține conului convex C generat de ceilalți $m+n—1$ vectori, sau nu aparține acestuia. Dacă — a_n *e Ć,* atunci există numerele nenegative [Zj,..., [z_m, X_n..., X_{n_1} astfel ca

$$\sum_{J=1}^{m} \qquad \text{pentru orice } i$$

adică

$$5\hat{}\ X, \quad a_{in} = — ţij \quad \text{pentru orice } i$$

Notînd

rezultă că $y = (î/_n.\text{--},y_n)$ satisface condițiile (2.4.5) și este deci o strategie optimă pentru jucătorul II, cu $y_n > 0$.

Să considerăm acum cazul —a_n\$ *C.* Atunci, conform lemei 2.4.6, există numerele reale *Qi, - ■ Q*$_m$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{m} {}^{e}iy > {}^{0} \text{ pentru toți j = l,.m,} \qquad (2.4.8)$$

$$\sum_{<-1}^{m} Qi > 0 \text{ pentru toți j = l,.. .,n—l} \qquad (2.4.9)$$

2.4.6. LEMĂ *(Farkas). Fie* r^k = (rî,... ,rț), fc = 1,..., p + 1, *n-vectori cu proprietatea că, pentru orice numere* $q_v .. ., q_n$ *care satisfac inegalitățile*

$$T_l q_i r^k{}_i > 0 \ (k = l,...,p), \quad \mathbf{J = 1}^{n} \qquad (2.4.$$

este satisfăcută și inegalitatea

$$\mathrm{E}\ q, \underset{\mathbf{J = 1}}{rt^{+1}} > 0. \qquad (2.4.7$$

Atunci r^{P+1} *aparține conului convex C generat de* $r^1,...\ ,r''$. *Demonstrație.* Să presupunem că r''^{4-1} e *C.* Conform lemei 2.4.2, există atunci numerele reale $q_v...,q_„$ astfel incit

$$\underset{\mathbf{J = 1}}{\overset{\mathbf{n}}{S}} q > r\hat{}^{+l} = «_{B+}1$$

Și

$$\underset{\mathbf{j = l}}{\overset{\mathbf{n}}{\mathrm{E}}} Qj\ ^{s}j > ?_{n}+\text{i pentru orice } s \text{ e } C.$$

Deoarece 0 e *C,* rezultă $q_{n+}i<0.$ Deci, utilizînd egalitatea de mai sus, (2.4.7) nu este verificată, dar vom demonstra imediat că $\mathrm{E}^{\mathbf{n}}_{\ 3,\ s,\ >\ 0}$ **3-1** pentru orice *s e C*; în particular, pentru $s = r^1,..., r^v$ rezultă că sînt satisfăcute condițiile (2.4.6). Fiindcă (2.4.7) nu este satisfăcută, sînt contrazise ipotezele lemei, ceea ce demonstrează afirmația acesteia. Mai rămîne de demonstrat afirmația lăsată în suspensie mai *n* sus. Să presupunem prin absurd că există *se C* astfel ca E < 0.

$$\mathbf{3 = 1}$$

Pentru orice a pozitiv avem *<ts e C.* Pentru a suficient de mare suma E (a*/) = a E ^{8}i devine arbitrar de mică, în particular mai mică decîtî,$_{+1}$, ceea ce contrazice inegalitatea

de la începutul demonstrației. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

este *optimă* pentru primul jucător, în sensul că nu există nici o strategie care să-i aducă un cîștig mediu mai mare ca *v,* indiferent de strategia folosită de jucătorul II. Invers, dacă *y* are proprietatea n

$$\sum_{J=1} \quad (i=l,\ldots,m), \qquad (2.4.5)$$

atunci *y* este optimă pentru jucătorul II în sensul definit mai înainte. Avem evident atunci

$$xAy^{1} = v,$$

deoarece $v < xAy^{l} <. v,$ folosind (2.4.4) și (2.4.5).

Prin urmare, strategiile optime *x* și *y* sînt de asemenea strategii optime una împotriva celeilalte, ca și împotriva oricărei alte strategii a adversarului. O asemenea pereche *(x, y)* de strategii optime se numește pentru acest motiv *soluție a jocului.*

Teorema următoare (o variantă mai tare a teoremei minimax) va fi necesară mai departe.

2.4.4. TEOREMĂ. *într-un joc matriceal A, de dimensiune mxn, fie jucătorul II are o strategie optimă y cu* $y_n > 0$, *fie* I *are o strategie optimă x, pentru care*

$$\sum_{i-1}^{m} z_i > v.$$

Pentru demonstrarea teoremei 2.4.4 folosim următoarea definiție.

2.4.5. DEFINIȚIE. Fie *n*-vectorii r* = (rj,.. .,r£), fc = 1,..., *p.* Se numește *con convex generat de* $r^{1},\ldots$, r” mulțimea vectorilor *x* de forma

$$X = \sum_{k=1} K r^k,$$

unde $X_0, \ldots,$ sînt numere nenegative arbitrare. Se arată cu ușurință că acest con este într-adevăr convex.

$$y_i \geqslant 0,$$

$$= s_{n+i}$$

avem

$$\sum_{>-1}^{n} = \qquad < O, \text{ pentru orice}$$

$$S_{s,j}$$

Prin urmare , $v(y) < 0$ și $v_n < 0$.

In cazul 2) al lemei 2.4.3 avem $v(x) > 0$ și deci $v_T > 0$.

Prin urmare, inegalitatea $Vi<0<v_u$ nu poate avea loc. Să înlocuim acum jocul A cu jocul $B =$ unde $b_{ij} = a_y + k$. Pentru orice x și y avem evident

$$xBy' = xAy^I + k \text{ și deci}$$
$$Vi\ (B) = Vi\ (A) + k,$$

$$v_n\ (-B) = ®II\ (^)'+$$

Deoarece nu putem avea

$$\mathbf{(B) < 0 < } v_a \mathbf{\ (-B)}$$

și deci $(A)< — k<v_a\ (A),$

rezultă, k fiind arbitrar, că nu putem avea $v_T < v_n$»" deci $^v i > {}^v n$- Inegalitatea contrară a fost deja demonstrată și deci

$$Vi = v_n.$$

Cîștigul minim al jucătorului I este deci egal cu pierderea maximă a lui II, dacă se folosesc strategii mixte. Numărul $v = v_Ț = ®n$ se numește *valoarea jocului.* O

strategie x cu proprietatea

$$\overset{m}{>} V \ (j = l,\ldots,n) \qquad (2.4.4$$

(deci $p_{m+1} = 0$) și

$$\sum_{i=1}^{m} p_i y_i > 0$$

pentru orice y din acoperirea convexă. în particular, luînd drept y unul dintre cei $m+n$ vectori a_i, e_i avem

$$\sum a_{ij} p_i \le 0 \text{ pentru orice } j,$$
$$p_i > 0 \text{ pentru orice } i.$$

Fiindcă $p_i > 0$ și $\sum p_i > 0$, notînd $x_i = p_i / \sum p_j$, avem

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i > 0, \quad x_i > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} x_j = 1.$$

Folosind aceste două leme putem demonstra acum teorema 2.4.1.

DEMONSTRAȚIA TEOREMEI MINIMAX. Fie A un joc matriceal. Conform lemei 2.4.3, este adevărată fie afirmația 1) a acesteia, fie 2). în cazul 1) vectorul 0 se poate reprezenta ca o combinație liniară a celor $m + n$ vectori, adică există numerele ..., s_{m+n}, astfel incit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j + s_{n+i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$s_j > 0, \quad j = 1, \ldots, m + n,$$
$$\sum_{i=1}^{m+n} s_i > 0.$$

Dacă numerele $s_1, \ldots, s_n$ ar fi toate nule, atunci 0 ar fi o combinație liniară a celor m vectori unitari $e_1, \ldots, e_m$, ceea ce este imposibil (deoarece aceștia sînt liniar independenți). Deci cel puțin unul dintre

$$s_{n+1}, \ldots, s_{n+m}$$

este pozitiv și deci $\sum_{i=1}^{n} s_i > 0$. Notînd

$$y_i = \frac{s_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j}$$

E^

Prima sumă din partea dreaptă este — după cum am presupus — mai mică sau egală ca $2p_{„+1}$, în timp ce a doua este mai mare ca$2p_{n+1}$. Avem deci

dr |,_0

De aici rezultă că pentru *r* suficient de mic avem

$$p(®,w_r) < p\ (x, z),$$

ceea ce contrazice alegerea lui *z.* Inegalitatea (2.4.3) este deci adevărată pentru orice *y* G *B.*

2.4.3. LEMĂ. *(Teorema alternativei pentru matrice). Fie* $A = (a_y)$ *o matrice m'X.n. Atunci este adevărată una și numai una dintre următoarele două afirmații :*

1) *Punctul* 0 *(al spațiului m-dimensional) aparține acoperirii convexe a următoarelor m-|-n puncte :*

°1 = (®11> • • • , ttml)

ân — (ªln T • ªmn)

Și

$e_{\cdot} = (1,0, \bullet\bullet\bullet>0)$

$e_2 = (0,1,...,0)$

$e_n = (0,0, ...,1).$

2) *Există numerele reale* $x_{lf}.. .,x_m$, *astfel ca*

$$a\rangle\ 0, \sum_{i=1}^{m} = 1, \sum_{i=1}^{ni} \quad 0,\ j=l,...,n.$$

Demonstrație. Să presupunem că proprietatea 1) nu este adevărată. Atunci, conform lemei 2.4.2, există numerele reale $p_v.. .,p_{m+1}$, astfel ca

m

$$\sum_{j=1} S = p_{m+1}$$

Condiția (2.4.2) este evident verificată. Rămîne de demonstrat
(2.4.3).
Avem

$$\sum_{i-1}^{n} Pi\ Zi = \sum_{i-1}^{n} A - \sum_{i-1}^{n} zt\ Xi$$

și de aici

$$YlPiZi- = \sum_{i=1}^{n} Zi - 2 \sum_{i-1}^{n} Zi\ Xi + \sum_{i-1}^{n} xt = \sum_{i-1}^{n} (z_t - Xi)^2 > 0,$$

p_{n+1}
adică

$$Sp.Z, > P_{„+1}-$$

Să
că există $y\ e\ B$ astfel ca

$$Y > Piyi < ?_{„+r\ i=1}^{n}$$

Pentru că B este convexă, întreg segmentul determinat de y și z este inclus în mulțimea B, adică pentru orice $0<r<1$ avem $w_T = ry + +(1— r)z$ G $B.$ Pătratul distanței de la x la w_T este

$$P^2\ (x,\ w_r) = \sum_{i=1}^{n} (tfj - ry_t - (1 - r)\ z,)^2.$$

Derivata acesteia în raport cu r este

$$\frac{dp^2}{dr} = {}^{2} \sum_{i=1} (^{z}i - (^{x}i — {}^{r}y, -(!->\blacksquare)\ {}^{z}i) =$$

$$= {}^{2} \sum (z_f - x_t)\ y_t - 2 \sum (Zi - x_t)\ z_t + 2\ £\ r\ (z_f - yj^2 =$$

$$= {}^{2} \sum 2/i - {}^{2} \sum PiZ_t + 2r\ £\ («, - y,)^2$$

și deci în punctul $r = 0$ (adică pentru $w_f = z)$ avem

$$\frac{dpM}{dr}_{!,=o} \qquad YiPiZi.$$

(presupunînd că minimele și

maximele există). Din această inegalitate rezultă că

$$v_L < r_n.$$

Această inegalitate corespunde celei din (2.2.3). De fapt este și aici natural ca cîștigul minim al jucătorului I să nu depășească pierderea maximă a lui II. în cazul strategiilor pure am văzut că în (2.2.3) are loc egalitatea numai în cazuri particulare. în acest caz însă avem următorul rezultat.

2.4.1. TEOREMĂ. *{Teorema minimax)*

$$Vi = {}^{r}n-$$

Această teoremă fundamentală a teoriei jocurilor a fost demonstrată în diverse moduri. Aici dăm o demonstrație a lui von Neumann și Morgenstern. începem cu următoarele două leme.

2.4.2. LEMĂ. *(Existența unui Mperplan de separare).* Fie *B* **o** mulțime convexă închisă în spațiul euclidian n-dimensional și *x=(x*$_{lt}$*..., x*$_n$*)* un punct care nu aparține lui *B.* Atunci există numerele reale p_n..., p_n, p_{n+1}, astfel ca

$$\mathbf{E\ P< = p_{n+}i} \qquad \mathbf{(^2\text{-}^4\text{-}^2)}$$

i-1

Și

$$\sum_{i=1}^{n} Pi?/i>Pn+i \quad \text{pentru orice } y \text{ e } B. \qquad (2.4.3)$$

(într-un limbaj geometric Ierna afirmă că există un hiperplan, care trece prin punctul *x,* astfel ca mulțimea *B* să fie conținută într-unul dintre semispațiile determinate de hiperplan).

Demonstrație. Fie *z* punctul din *B* situația distanță minimă de *x.* (Un astfel de punct există, în baza ipotezei că *B* este închisă.) Să notăm

$$P< = «i\ i =$$

$$\mathbf{P_n{+}i = \sum_{i-1}^{n} E\ z_i x_i - \sum_{i-1}^{n} X\ a?f.}$$

Ca și pînă acum, jucătorul I trebuie să se teamă că II va descoperi strategia sa *x.* în acest caz II va alege cu siguranță strategia sa *y* care minimizează *A(x, y).* Folosind strategia *x,* jucătorul I obține deci cel puțin cîștigul mediu

$$v(x) = \min xAy^{1}. \qquad (2.3.5)$$

Întrucît xAy^{1} poate fi considerat ca medie ponderată a cîștigurilor medii ale jucătorului I, cînd acesta folosește strategia *x* împotriva strategiilor pure ale jucătorului II, minimul acestor medii ponderate se atinge pentru o strategie pură, adică

$$v(x) = \min_{i} xA._{f} \qquad (2.3.6)$$

(A., desemnează coloana *j* a matricei A).

Desigur, jucătorul I alege *x* astfel încît să maximizeze *v(x)* și astfel cîștigă cel puțin

$$Vj = \max_{\text{«SX } i} \min xA._{3}. \qquad (2.3.7)$$

(Fiindcă mulțimea *X* este compactă, din continuitatea funcției *v{x)* rezultă existența maximului (2.3.7).) Un asemenea *x* se numește *strategie maximin* a jucătorului I. Analog, folosind strategia *y,* jucătorul II are cel mult pierderea medie

$$v(y) = \max A_{4.}I/' \qquad (2.3.8)$$

(2j. desemnează linia *i* a matricei A). El trebuie să aleagă *y* astfel încît să minimizeze această pierdere și astfel are cel mult pierderea

$$t'_{n} = \min_{i} \max A_{t}.y^{l}. \qquad (2.3.9)$$

O strategie *y* pentru care se atinge minimul în (2.3.9) se numește *strategie minimax* pentru jucătorul II. Valorile v_L și se numesc *valori ale jocului* pentru jucătorul I și respectiv II.

2.4. TEOREMA MINIMAX

Se arată cu ușurință că pentru orice funcție *F(x,y),* definită pe produsul cartezian *X* x *Y,* avem

(2.4.

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) < \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Demonstrația, elementară, este lăsată pe seama cititorului. Dacă în această inegalitate avem egalitate, atunci există un punct șa; în caz contrar jocul nu are puncte șa. într-un astfel de joc nu putem prevedea nimic, dar putem stabili următoarele : *jucătorul* I *trebuie să nu cîștige mai puțin decît v'If* iar *jucătorul* II *să nu piardă mai mult decît v'n.*

Dacă comunicăm adversarului strategia noastră, într-un joc fără punct șa putem obține în cel mai bun caz cîștigul minim *v[,* respectiv pierderea maximă ®n, după cum reprezentăm jucătorul I sau II. Putem obține un rezultat mai bun numai evitînd ca adversarul să ne afle strategia. Aceasta este desigur greu de realizat atîta timp cît alegerea noastră se bazează pe raționamente logice, căci nimic nu împiedică pe adversar să reproducă acest raționament.

Deci strategia trebuie aleasă în mod „nerațional". Dar ce sens are atunci întreaga noastră analiză?

Răspunsul este următorul: alegerea trebuie făcută la întîmplare (aleator), adică nu pe baza unui raționament, dar schema aleatoare însăși trebuie concepută în mod rațional. Această idee stă la baza noțiunii de strategie mixtă.

2.3.1. DEFINIȚIE. *O strategie mixtă* a unui jucător este o repartiție de probabilitate pe mulțimea strategiilor sale pure.

Dacă jucătorul posedă un număr finit *m* de strategii pure, atunci o strategie mixtă a sa constă dintr-un *m*-vector $x=(x_{lt}.. .,x_m)$ cu proprietățile :

$$x_i > 0 \text{ pentru toți i=l,..., } m \qquad (2.3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} = 1 \bullet \qquad (2.3.2)$$

Notăm cu *X* și I' mulțimile strategiilor mixte ale jucătorilor I, respectiv II.

Să presupunem că jucătorii I și II joacă jocul matriceal *A* și aleg strategiile mixte *x* și *y.* Atunci cîștigul mediu este

$$y)= £ \sum_{m} \sum_{n} £ \text{ ffly } y>, \qquad (2.3.3)$$

$\mathbf{i}^{-1}\,\mathbf{j}^{-1}$

sau, în formă matriceală :

dacă jucătorul II ghicește strategia jucătorului I, este bine pentru primul jucător să și-o păstreze. Există deci o deosebire fundamentală între acest joc și precedentul. în primul joc păstrarea secretă a strategiei alese este extrem de importantă, dar în al doilea joc aceasta nu joacă nici un rol. Explicația rezidă desigur în existența unui punct șa în al doilea joc.

2.3. STRATEGII MIXTE

Analiza de pînă acum a arătat cum trebuie jucat un joc matriceal care posedă punct șa, dar nu a dat nici o indicație asupra comportării optime a jucătorilor în jocuri fără puncte șa. Astfel de jocuri sînt însă cele mai des întîlnite.

Să presupunem că jucăm un joc matriceal fără punct șa, de exemplu

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Desigur, nu putem prevedea desfășurarea jocului. Să presupunem însă că, strategia adversarului rămînîndu-ne imprevizibilă, acesta ghicește exact decizia noastră. în această situație, ca jucător I, vom alege cu siguranță prima strategie, cu care cîștigăm două unități, în timp ce cu a doua strategie am cîștiga doar o unitate. Acest cîștig sigur de cel puțin două unități este pentru noi cîștigul minim, notat

$$v'_t = \max_{<} \{\min_{i} a_w\}. \qquad (2.2.1)$$

în rolul jucătorului II, în aceleași condiții ar trebui să alegem a doua strategie, care ne aduce o pierdere de cel mult trei unități. Notăm această pierdere maximă

$$= \min_{> <} \{\max a_w\}. \qquad (2.2.2)$$

Cîștigul minim și pierderea maximă joacă un rol important în jocurile matriceale. Cîștigul minim al

jucătorului I este desigur cel mult egal cu pierderea maximă a jucătorului II, adică

$$< v'_u. \qquad (2.2.3)$$

După cum vom vedea, o pereche (i, *j)* de strategii este un punct de echilibru, dacă și numai dacă elementul a_{ij} corespunzător este simultan cel mai mare în coloana lui și cel mai mic în linia lui. Un astfel de element se numește *punct șa* (prin analogie cu suprafața unei șei, curbată în sus pe o direcție și în jos pe direcția perpendicu- ' Iară). Nu orice matrice posedă un punct șa.

2.2.1. Exemplu. Jocul matriceal

(‘q

are un punct șa în linia a doua și coloana a doua.

2.2.2. Exemplu. Jocul matriceal

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nu are un punct șa.

Să presupunem că doi jucători joacă un joc matriceal. în acest caz alegerea unei strategii înseamnă pentru jucătorul I alegerea unei linii *i,* iar pentru jucătorul II alegerea unei coloane *j.* Cîștigul este atunci a_{iS}. Întrucît aceasta este suma primită de jucătorul I de la jucătorul II, I va încerca să o maximizeze, iar II să o minimizeze, în orice caz, nici unul nu știe ce strategie va alege adversarul său, și tocmai acesta este un element esențial în alegerea propriei strategii.

Să analizăm, de exemplu, jocul aruncării monedei (exemplul 1.3.2). Jucătorul I poate raționa astfel: „De obicei se alege stema. De aceea ar trebui să aleg banul. Dar este posibil ca jucătorul II să raționeze similar, presupunînd că eu voi alege banul. Ar fi deci mai bine ca eu să aleg totuși stema. Dar este posibil ca jucătorul II să ghicească acest raționament, deci ... ”. Cu un astfel de raționament jucătorul I nu poate ajunge în acest caz la nici o decizie satisfăcătoare.

Să presupunem acum că ne aflăm în condițiile jocului din exemplul 2.2.1.Jucătorul I se va decide probabil pentru prima sau a doua dintre strategiile sale și o va alege în cele din urmă pe a doua, raționînd astfel: „Trebuie să aleg prima sau a doua dintre strategiile mele. Jucătorul II, înțelegînd aceasta, va alege a doua strategie a sa, deci pentru mine este cel mai bine să aleg a doua strategie a mea". Chiar

2) 7t (<Tp CT₂) = 7T (Tp T₂) = 7T (<Tp r₂) = *7Z* (Tp d₂). (2.1.2)

Demonstrație. Pentru că *(a_v a₂)* este punct de echilibru, avem

77 (<*!» U₂) > 7T (Tx, C₂)

și analog, fiindcă (Tx, T₂) este punct de echilibru,

77 (ᵀl> ff2) 77 (ᵀl> ᵀ2)

și deci

77 (<Tp <J₂) > 7t (Tp <T₂) > ~ (Tp T₂).

Analog se arată că

77 (Tp T₂) > 7t ((Tp T₂) > 77 (ffp O₂),

și cu aceasta rezultă (2.1.2). Alai departe, pentru orice avem

A
77 (< 77 (^2) = 77 (~D ff2)

și, analog, pentru orice u_2

A
™ (ᵀl> ᵃZ) 77 (ᵀl> ᵀ2) = 77 (ᵀl, ᶜᵀ2)j

deci (Tp u_2) este un punct de echilibru. Similar se arată că (up T_2) este punct de echilibru.

Afirmația teoremei nu este valabilă pentru un joc arbitrar. în jocul din exemplul 1.4.2 , (04, și (a_2, $Ș_2$) sînt puncte de echilibru, dar cîștigurile corespunzătoare sînt diferite, și nici (a_n p_2), nici (a_2,3J nu sînt puncte de echilibru.

2.2. FORMA NORMALĂ

După cum am văzut, forma normală a unui joc finit de două persoane cu sumă nulă se reduce la o matrice *’ *A,* în care numărul liniilor (coloanelor) este egal cu numărul strategiilor jucătorului I (II). Dacă jucătorul I alege a t-a strategie, iar jucătorul II a j-a strategie, atunci cîștigul mediu este reprezentat de elementul a_{it} din linia *i* și coloana *j* a matricei *A.*

*> Pentru acest motiv un astfel de joc se numește *Joc matriceal. (N.T.)*

JOCURI DE DOUĂ PERSOANE CU SUMĂ NULĂ

2.1.JOCURI CU SUMĂ NULĂ

2.1.1. DEFINIȚIE. Un joc T se numește *joc cu sumă nulă* dacă, pentru orice nod final, funcția de cîștig satisface condiția

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{S} = 0. \qquad (2.11)$$

în general, un joc cu sumă nulă reprezintă un sistem închis, în care orice cîștig al unui jucător reprezintă în mod necesar o pierdere egală pentru ansamblul celorlalți jucători. Majoritatea jocurilor de societate sînt jocuri cu sumă nulă. Jocurile de două persoane cu sumă nulă sînt ocazional numite jocuri antagoniste.

Datorită relației (2.1.1), a n-a componentă a vectorului de plată este perfect determinată de celelalte *n — 1* componente. De aceea, în cazul unui joc de două persoane cu sumă nulă este suficient să se dea doar prima componentă a vectorului cîștigurilor. A doua componentă este în mod necesar egală cu opusul primei. în acest caz numim prima componentă, pe scurt, *cîștig,* înțelegînd prin aceasta că al doilea jucător plătește această sumă primului

jucător. Mai departe se va vedea că jocurile de două persoane cu sumă nulă se deosebesc de altejocuri prin aceea că pentru ambii jucători este lipsit de sens să coopereze într-un mod oarecare, căci orice cîștig al unuia înseamnă o pierdere pentru celălalt. Semnificația acestei observații se înțelege din următoarea teoremă.

2.1.2. TEOREMĂ. *Fie* (a_{lt} <r₂) *și* (T$_n$ T$_2$) *puncte de echilibru într-un joc de două persoane cu sumă nulă. Atunci :*

1) (°i> ^{T}2) *fi* ("i, ^{a}z) *d*^{e} *asemenea puncte de echilibru*

c) Fie <<r, partida (respectiv numărui *x* atașat), obținută cind Jucătorii folosesc strategiile a și respectiv r. Pentru orice strategie *a* a lui I, jucătorul II are la dispoziție 2**° strategii T, care produc partide (s, diferite (analog, pentru fiecare strategie T a lui II).

d) Mulțimea 5 poate fi construită (folosind axioma alegerii), astfel incit pentru orice să existe un T3 astfel ca <03, T3> 4 S, și pentru orice T_Y să existe un $<r_Y$ astfel ca
$< T_Y>$ G S.

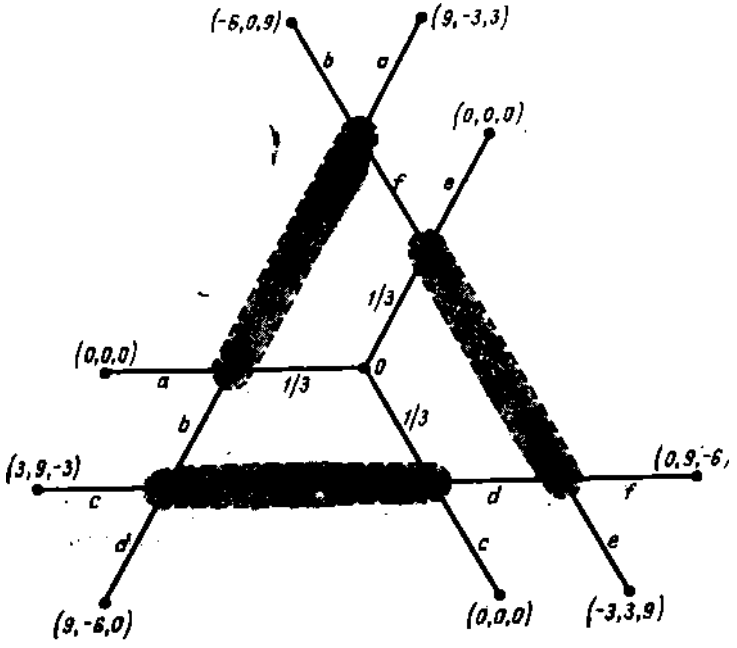


Fig. 1.3.

2. Construiți forma normală a jocului, al cărui arbore este dat in fig, 1.3. Jocul începe tn nodul 0 printr-un pas aleator. Fiecare dintre cei trei jucători are o mulțime de informație constind din două noduri, fiecare cu două alternative (notate *a* și *b, c* și *d, e* și f). cîștigul jucătorului *i* într-un nod final dat (în acest caz *X)* descrește, atunci, pentru orice alegere a strategiilor, cîștigul său mediu de asemenea descrește sau rămîne neschimbat. Aplicînd teorema 1.4.3, se obține

$$\bullet\bullet\bullet > O'i» \bullet\bullet\bullet > {}^{e}n) < {}^{n}i\,(\qquad\qquad \bullet\bullet\bullet\ ?$$

deci (CT_n ..., u„) este un punct de echilibru.

Relativ la existența punctelor de echilibru demonstrăm acum următoarea teoremă.

1.4.5. TEOBEMĂ. *Orice joc finit de n persoane cu informație completă posedă un punct de echilibru.*

Demonstrație. Definim *lungimea* unui joc ca numărul maxim de noduri parcurse pînă la atingerea unui nod final, adică numărul maxim de pași de la începutul pînă la sfîrșitul jocului. Un joc finit are evident lungime finită. Demonstrația se face prin inducție completă după lungimea jocului. Afirmația este banală, dacă r are lungimea 0. într-un joc de lungime 1, cel mult un jucător efectuează o mișcare și el obține strategia de echilibru, alegînd cea mai bună alternativă. Dacă r are lungimea m, jocul poate fi descompus (avînd informație completă) în jocuri parțiale de lungime mai mică ca *m.* în baza ipotezei inducției, fiecare dintre aceste jocuri are un punct de echlibru. Aplicînd teorema 1.4.4, rezultă afirmația.

PROBLEME

1. Un joc infinit, chiar cu informație completă, nu are In mod necesar un punct de echilibru.

a) Considerați jocul de două persoane, in care doi jucători aleg alternativ unul dintre numerele 0 și 1. Dacă in pasul i a fost ales numărul z, (i= 1, 2,...), se atașează jocului numărul *x* din intervalul [0, 1] :

$$X = \sum_{t=1}^{QO} x_i 2^{-i}.$$

Jucătorul I clștigă o unitate de la jucătorul II, dacă *x* 6 *S,* și pierde o unitate, dacă z(£ *S,* unde S este o submulțime dată a intervalului [0, 1],

b) Fiecare jucător are 2*° strategii, notate op și respectiv rp, cu 0<a, unde a este cel mai mic număr ordinal care are cel puțin 2 **• predecesori ordinali. final; cîștigul în acest punct, notat constă din rezultatul sub- jocului r_x.

După cum am spus, o strategie pentru jucătorul *i* este o funcție, al cărei domeniu de definiție este totalitatea mulțimilor de informație ale jucătorului *i.* Dacă un joc este decompozabil în nodul *X,* atunci fiecare strategie *a* se poate

descompune în două părți, anume <7|r/x, restricția lui u la mulțimile de informație ale lui *T/X,* și restricția lui a la r_x. Invers, o strategie pentru *V/X* și o strategie pentru r_z pot fi combinate într-o strategie pentru jocul T.

1.4.3. TEOREMĂ. *Fie jocul* T *decompozabil în nodul X. Pentru* a_t e *(i* = 1, ..., *n) se atașează nodului X, considerat ca nod final al lui V/X, cîștigul*

(®i[rr • • • •,

Atunci avem

7u (ffj, . . . , G„) = Kp/x (ffi;r/x, ■ • • , ff»|r/x).

Demonstrația acestei teoreme, simplă, este lăsată cititorului ca exercițiu. Trebuie arătat că, pentru orice rezultat posibil al pașilor aleatori, același nod final este atins atît în jocul inițial, cît și în descompunerea acestuia. Cu aceasta putem demonstra următoarea teoremă.

1.4.4. TEOREMĂ. *Fie* T *un joc decompozabil în nodul X și fie* cs_i *e (i = 1, .. ,,n) astfel încît:* a) (cirx, • • •, ffnrț) *este un punct de echilibru pentru și* b) (ffi|r/x, • • •, ffn|r/x) *este un punct de echilibru pentru r/X cu cîștigul n* (ffiirj, •••, ff»]rx) *în nodul final X. Atunci* (dp ..., <r_n) *este un punct de echilibru pentru* T.

Demonstrație. Fie a, e (i = 1, ...,*n).* Întrucît (aiirx, • • • , anin) este un punct de echilibru pentru I\, avem

A

^{7r}<(• • •, • • •> ^{ff}n|rx)j< (CITJ, • • •>

Pe de altă parte, cîștigul în nodul *X* fiind 7t(tfi|rx, ... , ffnirj) și ținînd seama de b), avem

A

Ttj (tfiir/x, • • ffiir/x, • • • *i* w»|r/x) < (<Jir/x, • • • , ®»ir/x).

Cîștigul (pentru o mulțime dată de strategii) este o medie ponderată a cîștigurilor în unele din nodurile finale ale arborelui jocului. Dacă

Majoritatea jocurilor de societate sînt după această definiție finite. Este ușor de văzut că într-un joc finit există doar o mulțime finită de strategii.

1.4. PUNCTE DE ECHILIBRU

1.4.1. DEFINIȚIE. Un sistem (GÎ, G_2, ..., de *n* strategii G* e se numește *punct de echilibru* dacă pentru orice *i = l, ..., n* și orice G, e Sj avem

«Tj (• • -1 °i-l, CTi + l, • ■ an) < (®1, • • •, °n)-

Cu alte cuvinte, un sistem de *n* strategii formează un punct de echilibru, dacă nici un jucător nu are un motiv rezonabil să își modifice strategia sa, presupunînd că toți ceilalți jucători își păstrează strategia corespunzătoare. Dacă un jucător cunoaște exact planurile celorlalți, el va prefera strategiile care împreună cu acelea ale oponenților formează un punct de echilibru, și jocul va deveni stabil.

1.4.2. Exemplu. într-un joc de două persoane cu forma normală

	Pi	**P2**
q_x	**(2, 1)**	**I (0, 0)**
«2	**(0, 0)**	**1(1, 2)**

(«j, și (a_2, p_2) sînt puncte de echilibru.

Din păcate, nu orice joc posedă puncte de echilibru. Un joc fără puncte de echilibru este, de exemplu, aruncatul monedei (exemplul 1.3.2). Dacă un joc nu posedă punct de echilibru, atunci fiecare jucător va încerca să-și păcălească adversarii, păstrîndu-și secrete strategiile. Această consecință ne conduce la ideea că în jocuri cu informație completă există întotdeauna puncte de echilibru.

Pentru a demonstra această afirmație vom folosi noțiunea de *descompunere a unui joc.* Un joc T se numește *decompozabil în nodul X,* dacă nici o mulțime de informație nu conține noduri care aparțin atît a) mulțimii formate din *X* și toți succesorii lui, cît și b) restului arborelui jocului. în acest caz putem separa jocul parțial avînd drept noduri pe *X* și toți succesorii lui, de jccul-cît *V/X,* avînd drept noduri restul nodurilor și *X.* Pentru jocul-cît *X* este nu nod valoarea medie a funcției de cîștig. Funcția ^(GJ,..., G„) poate fi tabelată pentru toate valorile posibile ale lui a_{lf} ..., G„, fie în forma unei relații, fie printr-un tabel n-dimensional de n-vectori.(în

cazul n = 2 rezultatul este o matrice, ale cărei elemente sînt perechi de numere reale.) Acest tabel n-dimensional se numește *forma normală* a jocului T.

1.3.2. Exemplu. în jocul aruncării monedei (exemplul 1.2.3) fiecare jucător are două strategii: alegerea stemei sau banului. Forma normală a acestui joc este următoarea matrice (liniile reprezintă strategiile judecătorului I, iar coloanele strategiilor jucătorului II):

	B	S
B	(-1, 1)	(1, -1)
s	(i, —i)	(_i, pi

1.3.3. Exemplu. Să considerăm următorul joc. **O** variabilă aleatoare ia valorile 1, 2, 3, 4, fiecare cu probabilitatea 1/4. Jucătorul I, fără a cunoaște rezultatul experimentului aleator, alege un număr *x,* iar jucătorul II, fără a cunoaște rezultatul experimentului aleator și alegerea lui I, alege un număr *y.* Drept funcție de cîștig se ia
ras (|y - s|-|a? - «I, \X - z| - |y - z|),

adică se urmărește ghicirea cit mai exactă a valorii *z* luate de variabila aleatoare. în acest joc fiecare jucător are patru strategii: 1, 2, 3, 4. Dacă I alege strategia 1 și II alege strategia 3, atunci cîștigul este (2, —2) cu probabilitatea 1/4, (0, 0) cu probabilitatea 1/4 sau (—2, 2) cu probabilitatea 1/2. Valoarea medie este deci 7t(l, 3) = = (— 1/2, 1/2). Calculînd astfel toate valorile ^(oj, G_2), se obține următoarea matrice:

	1	2	3	4
li	(0,0)	(-1/2,1/2)	(-1/2,1/2)'	(0^0)
2l	(1/2,-1/2)	(0,0)	(0,0)	(1/2,-1/2)
3	(1/2,-1/2)	(0,0)	(0,0)	(1/2,-1/2)
4	(0,0)	(-1/2,1/2)	(-1/2,1/2)	(0,0)

1.3.4. Definiție. Un joc se numește *finit,* dacă arborele său are un număr finit de neduri.

element. Jocul se numește *cu informație completă* dacă fiecare jucător are informație completă în T.

De exemplu șahul și jocul de dame sînt jocuri cu informație completă, în contrast cu jocurile de bridge și poker.

1.3. STRATEGII. FORMA NORMALĂ

Intuitiv, o strategie este un plan de joc, prin care un jucător stabilește cum va reacționa el în fiecare din situațiile posibile ale jocului. Mai precis :

1.3.1. DEFINIȚIE. O *strategie* a jucătorului *i* este o funcție care atașează fiecărei mulțimi de informație fi' un arc*' care succede unui nod din *Si.* Notăm cu mulțimea tuturor strategiilor jucătorului *i.*

în general, se presupune că un jucător planifică numai puține mișcări viitoare, și de obicei abia atunci cînd el trebuie să efectueze o mișcare. O asemenea practică este adeseori necesară pentru că, de exemplu la șah sau poker, numărul mișcărilor posibile este atît de mare, încît nimeni nu poate ține seama de toate posibilitățile viitoare. Din punct de vedere pur teoretic se poate depăși această dificultate practică și se poate presupune că înainte de începutul jocului fiecare jucător decide ce va face el în fiecare situație particulară posibilă, adică fiecare jucător alege, înainte de joc, strategia sa. După aceasta rămîn deschise numai mișcările aleatoare. Ele pot fi concentrate într-o singură ,,mișcare", al cărei rezultat, împreună cu strategiile alese, determină perfect punctul final al jocului.

Fiecare jucător este desigur interesat de acea strategie care îi asigură cel mai mare cîștig (adică jucătorul *i* urmărește să maximizeze componenta *i* a vectorului cîștigurilor). Deoarece asupra rezultatelor pașilor aleatori se pot face doar afirmații probabilistice, se ia drept cîștig valoarea medie a funcției de cîștig.

Notăm $a_{(}$eSj(i = l, 2, ..., *n)* strategiile jucătorilor și

---

[77] **(CTP ■ ■ ■, '») = (*1 (gl, • • • , gв) , • • • , (gp • • •, g«))**

*> Mai exact, o *clasă de arce,* și anume toate arcele care corespund unei anumite acțiuni din prin corespondența din axioma f) a definiției 1.2.2. Putem deci spune că o strategie asociază fiecărei mulțimi *Si* un

element din *it.* Prin urmare, o strategie a jucătorului *i* este o funcție definită pe mulțimea 1...a tuturor mulțimilor de informație ale
jucătorului!, cu proprietatea că cr, (S{) G pentri orice $j = l,...,p_{\{}$. *(N. T.)*

în cazul a 13 cărți arborele jocului este prea mare pentru a fi reprezentat aici. O parte a arborelui aceluiași joc, jucat însă cu trei cărți, este reprezentat în fig. 1.2. Singura mișcare aleatoare constă în amestecarea cărților, prin care acestea se așază în una din cele șase ordini posibile, fiecare cu probabilitatea 1/6. Toate mișcările

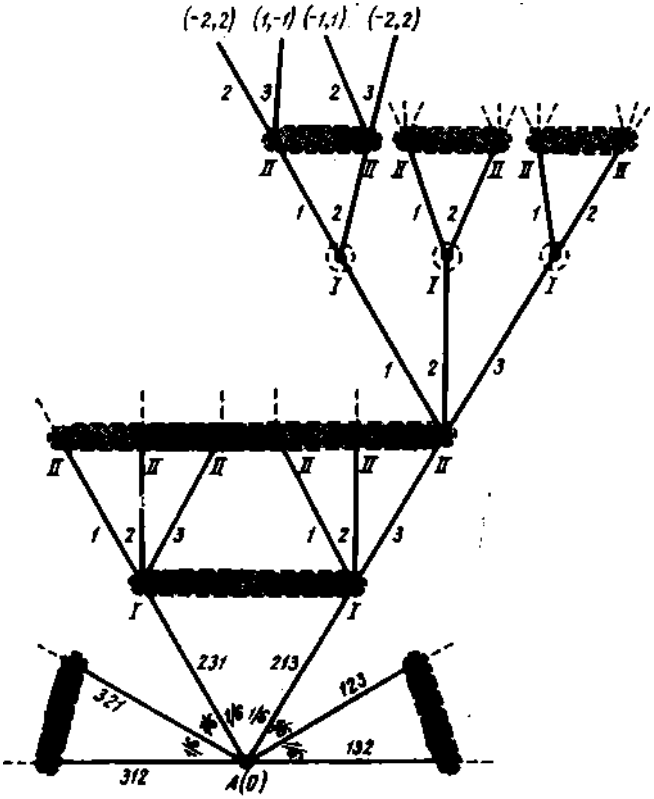


Fig. 1.2.

ulterioare sînt decise de cei doi jucători. Din arborele jocului sînt reprezentate aici numai anumite părți, între care nodul inițial, cîteva ramuri și patru noduri finale. Celelalte ramuri sînt asemănătoare celor reprezentate în desen.

Eelativ la informația jucătorilor introducem următoarea definiție :

1.2.5. DEFINIȚIE. Un jucător are *informație completă în* T, dacă fiecare dintre mulțimile sale de informație S_t constă dintr-un singur

Aceste puncte descriu elementele esențiale ale unui joc. Ele au următoarele semnificații:

a) existența unui nod inițial;

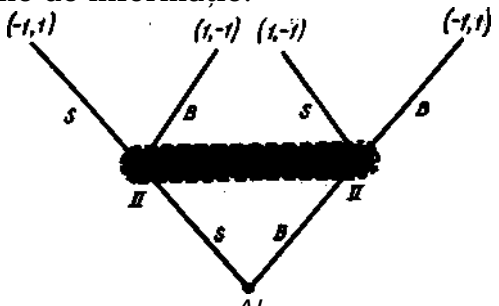
b) existența unei funcții de cîștig;

c) totalitatea mișcărilor se împarte în mișcări aleatoare ($*S_0$) și cele efectuate de cei *n* jucători *(8_V..., S_n);*

d) pentru fiecare mișcare aleatoare se definește o schemă aleatoare;

e) mișcările unui jucător se împart în „mulțimi de informație". Anume, jucătorul cunoaște în care mulțime de informație se găsește la un moment dat, dar nu cunoaște poziția exactă în această mulțime.

1.2.3. Exemplu. în jocul „aruncarea monedei" jucătorul I alege „stema" (S) sau „banul" (B). Jucătorul II, fără a cunoaște alegerea jucătorului I, alege de asemenea stema sau banul. Dacă alegerile coincid, atunci jucătorul II cîștigă un ban de la I. în caz contrar I cîștigă un ban de la II. în arborele jocului (fig. 1.1), vectorul atașat nodurilor finale reprezintă funcția de cîștig, iar numerele de lîngă celelalte noduri indică jucătorul, căruia îi aparține mutarea. Domeniul mărginit de linia punctată conține nodurile din aceeași mulțime de informație.



Al

Fig.

1.2.4. Exemplu. Doi jucători primesc fiecare cîte o culoare completă a unui pachet de cărți de joc (13 cărți numerotate de la 1 la 13). Cărțile unei a treia culori se amestecă și apoi sînt descoperite una cîte una. De fiecare dată cînd o carte a fost descoperită, fiecare jucător joacă una dintre cărțile sale, la alegerea sa, fără a cunoaște cartea jucată de celălalt. Jucătorul care a jucat cea mai mare carte cîștigă un număr de puncte egal cu numărul cărții

descoperite (dacă cărțile jucate sînt egale, nu cîștigă nici unul). Jocul se continuă pînă la epuizarea celor 13 cărți. Cîștigul este diferența dintre punctele acumulate de cei trei jucători.

1.2. JOCURI ÎN FORMĂ EXTINSĂ

Conceptul general de joc conține deci următoarele trei elemente : 1) succesiunea de mișcări asupra cărora decid persoane sau întîmpla- rea, 2) starea de informare a jucătorilor, 3) o funcție de cîștig. Mai întîi vom defini noțiunea de *arbore topologic* sau *arbore de joc,* ca o mulțime finită de *noduri* (vîrfuri) care sînt unite prin *muchii* (arce), astfel ca să rezulte un graf conex fără circuite (drumuri închise). Pentru oricare vîrfuri *A* și *B* există deci exact un șir de muchii și noduri care unesc *A* cu *B.*

1.2.1. DEFINIȚIE. Fie T un arbore topologic cu un nod specificat *A.* Spunem că nodul *C* este un *succesor* al nodului *B,* dacă șirul de muchii care unește *A* cu *C* trece prin *B. C* este un *succesor direct* al lui *B,* dacă *C* este succesor al lui *B* și există o muchie care unește *B* cu C. *X* se numește *nod final,* dacă nu are nici un succesor.

1.2.2. DEFINIȚIE. Prin *joc de n persoane în formă extinsă* se înțelege :

a) un arbore topologic T cu un nod specificat *A, nodul inițial* al lui T :

b) o *funcție de cîștig* care asociază fiecărui nod final al lui T un n-vector;

c) o partiție a nodurilor lui T care nu sînt noduri finale în $n + 1$ mulțimi S_o, S_B, numite *mulțimi ale jucătorilor-,*

d) pentru fiecare nod din S_o o distribuție de probabilitate pe mulțimea succesorilor direcți ai acestui nod;

e) o partiție a mulțimilor *(i = 1, ..., n)* în submulțimile *{mulțimi de informație),* astfel încît două noduri din aceeași mulțime de informație au același număr de succesori direcți ** și nici un nod al unei mulțimi de informație nu este succesor al unui nod al acestei mulțimi:

f) pentru fiecare mulțime de informație *Sl* există o mulțime **' *I{* și o aplicație bijectivă ***' a lui *I{* pe

mulțimea succesorilor direcți ai fiecărui nod din $S^{\#\# \S\S\S}$-.

CONCEPTUL DE JOC

1.1. NOȚIUNI GENERALE

Ideea principală a jocului tratat aici își are originea în jocurile de societate. Pornind dintr-o anumită situație inițială, urmează o serie de pași (mișcări), în fiecare pas jucătorii alegînd o mișcare dintr-o mulțime dată de mișcări posibile. Unele dintre aceste mișcări pot fi aleatoare, de exemplu aruncarea unui zar sau extragerea unei cărți dintr-un pachet de cărți de joc.

Exemple de astfel de jocuri sînt șahul, în care nu există mișcări aleatoare (exceptînd decizia asupra jucătorului care face prima mișcare), jocul de bridge, în care pe lîngă cunoaștere un rol important îl are întâmplarea, și în sfîrșit ruleta, care este un joc exclusiv aleator (joc de hazard).

Exemplele jocurilor de bridge și șah sînt potrivite pentru a pune în evidență și alte caracteristici esențiale ale unui joc. în șah ambii jucători cunosc toate mișcările precedente, ceea ce în bridge este valabil doar parțial. în unele jocuri jucătorul nu poate să stabilească care dintre mutările posibile au fost făcute efectiv de adversar sau de întâmplare. Prin urmare, el nu cunoaște poziția exactă a

---

‡‡‡*> Cu alte cuvinte, din fiecare nodal lui *st* pornesc același număr de arce. Conform axiomei f), fiecare dintre aceste arce corespunde uncia dintre acțiunile pe care jucătorul

§§§ le poate întreprinde în situația Sj. (-V. *T.)*

**) 7j reprezintă mulțimea tuturor acțiunilor (mutărilor) posibile ale jucătorilui i în situația (mulțimea de informație) S'. (A'. *T.)*

***> Prin această corespondență se identifică arcele pornind dintr-un nod al Iui *Sț* cu elementele mulțimii Ij a acțiunilor posibile ale jucătorului i în situația Sj *.(N. T.)*

*> în expresiile „jucătorul *i* primește suma p„" sau „clștigă p„", p; nu reprezintă în mod necesar o sumă bănească, cu un punctaj simbolic, care poate reflecta atlt un cîștig material, cit și o satisfacție personală. Notăm că „cîștigul" p, poate fi atît pozitiv, cit și negativ, reprczentlnd un cîștig efectiv In primul caz și o pierdere in al doilea caz. (.V.7').

jocului și este obligat să ia în considerare toate situațiile posibile ale jocului atunci cînd decide asupra mișcării următoare.

în sfîrșit, la încheierea unui joc jucătorii primesc o recompensă (plată, cîștig *'), care depinde de desfășurarea jocului. Există deci o funcție care asociază câștiguri fiecărei „situații finale" a unui joc. cooperativă" a unui joc de trei persoane, cu A = {1, 2, 3}, se impune deci, în mod natural, partiția în *coaliții între care interacțiunea este maximă,* adică partiția *(S*, N—S*),* unde 8* este coaliția dată de

$$\max W(N; 8, A - 8), \qquad (10)$$

se»

unde § este mulțimea coalițiilor {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}. Se arată că interacțiunea dintre cei doi jucători care compun 8* *este minimă.* Soluția cooperativă constă deci în coalizarea jucătorilor cu interacțiune minimă între ei, dar cu interacțiune maximă cu al treilea jucător. Atitudinea diametral opusă este *coalizarea jucătorilor între care coeziunea este maximă* (și, deci interacțiunea lor cu al treilea jucător este minimă), adică separarea sistemului în două părți cu legături cît mai slabe; această partiție este denumită „soluția necooperativă" a jocului.

Pentru alte cîteva concepte moderne de soluție, a căror prezentare depășește cadrul acestui studiu introductiv, cititorul va găsi o expunere succintă și o analiză inteligentă în excelenta monografie *Triade* a lui S. Guiașu și M. Malița [12].

(Lucrările citate au fost adăugate la bibliografia cărții).

consacrată în esență jocurilor cooperative de trei persoane. Autorii pornesc de la observația că adeseori elementul decisiv în *formarea coaliților* nu îl constituie cîștigul maxim, ci *afinitățile dintre jzică- tori,* formalizate în noțiunea de *grad de coeziune {de interacțiune, de independență, de organizare)* a elementelor constitutive ale unui sistem.

După cum se știe, gradul de nedeterminare a acțiunilor unui element cu comportament aleator este măsurat prin *entropia* cîm- pului de probabilitate corespunzător. Drept măsură a *gradului de coeziune* (de interdependență a componentelor, de organizare) a unui sistem A', format din elementele cu comportament aleator S_v . . ., S_k, se poate utiliza indicele lui Watanabe :

$$\text{IV'(A;} \quad \ldots, 8_k) = \sum_{\mathbf{i-1}}^{\boldsymbol{k}} \text{S7f(^)} - H(N), \tag{9}$$

adică diferența dintre suma nedeterminărilor [entropiilor *H (£,)]* elementelor componente și nedeterminarea întregului sistem [entropia *H* (A)]. Acest indice reflectă un aspect esențial al conceptului elementar de „organizare", anume faptul că *un sistem este cu atît mai organizat* (coeziunea, interdependența părților componente este cu atît mai mare), *cu cit este mai bine definită comportarea de ansamblu a sistemului* [adică cu cit este mai mică nedeterminarea H(A')J, *în ciuda comportării nedeterminate a elementelor constitutive.*

Se admite (v. [12], p. 156—158) că particularitățile esențiale ale jucătorilor sînt descrise prin *m* caracteristici, mai precis printr-o matrice A = $(a_w)f_i._m$, unde a_{ij} = 1 sau 0, după cum
jucătorul *i* posedă sau nu caracteristica *j.* Pentru fiecare coaliție 6' s A se calculează entropia :

$$H\ (8) = -\ Sp(a_s) \log p\ (a_s),$$

unde *p{a_s)* sînt probabilitățile (frecvențele relative) ale celor 2-'[1] tipuri de coloane a_s e {(ajitis I «< = 1 sau 0 *{i* e $)} în cele *m* coloane ale submatricei $A_s=(a_y)_{i6S;\ j=i\ m}$. Pentru orice

partiție a jucătorilor
în coalițiile $ și *A"—8* se poate calcula acum, conform cu (9), gradul de coeziune *W* (A^7 ; *8, N—S)* al coalițiilor >8 și A—A Ideea fundamentală este că *o cooperare stabilă este asigurată numai dacă coeziunea, interacțiunea dintre 8 și N —S este suficient de mare.* Drept „soluție

în acest sens. întrebarea următoare — *pentru jocuri care nu au soluție în sensul* (Pj) *sau* (P_2) — este dacă există soluții în sensul (P_3), adică dacă jocul are o *mulțime stabilă.* Majoritatea jocurilor au mulțimi stabile (un exemplu de joc fără nici o mulțime stabilă a fost construit cu greutate; vezi nota din p. 190), astfel că nu mai este necesar să examinăm problemele (P_4) —(P_5). Pentru acest motiv von Neuinann și Morgenstern au numit „soluție" a unui joc cooperativ orice mulțime stabilă. Deficiența conceptului constă în aceea că nu poate recomanda ca „optimă" o anumită imputație, ci doar o mulțime de imputații, dintre care urmează să fie aleasă una, pe baza unor elemente care nu sînt prinse în modelul matematic (abilitatea de negociere a jucătorilor etc.).

Valoarea Shapley. Shapley propune ca soluție a unui joc *v* o anumită imputație c?(v), bine definită, calculabilă exclusiv pe baza cunoașterii funcției caracteristice *v,* printr-o formulă (v. 9.1.4) dedusă pe baza unor axiome cît se poate de naturale (9.1.3). Interpretarea valorii Shapley este de asemenea naturală : să presupunem că coaliția totală se formează prin aderarea succesivă a jucătorilor, că cele *n!* ordini distincte de aderare sînt egal probabile și că un jucător *i* care la un moment dat se alătură coaliției *T* — {i} primește întregul cîștig *v(T) — v (T — {i})>v ({i})* obținut în mod suplimentar prin aderarea lui. Componenta *j* a vectorului o (®) reprezintă valoarea medie a cîștigului obținut de jucătorul *j* în aceste condiții.

Mult imea de negociere. După Aumann și Maschler [9.1] dificultatea principală în jocurile cooperative constă în lipsa unei concepții clare asupra *scopului jocului.* Scopul jocului nu ar fi obținerea unui cîștig maxim, deoarece, dacă fiecare jucător ar pretinde maximul într-o coaliție, nu s-ar

putea ajunge la nici o înțelegere și cooperarea ar fi exclusă, după cum am notat și în § 3.4, ci obținerea unei structuri (de coaliții și cîștiguri) „raționale" și *stabile în sensul obiecțiilor și contraobiecțiilor.* Mulțimea tuturor acestor structuri, numită *mulțime de negociere,* este propusă ca soluție a jocului. Spre deosebire de conceptele discutate mai înainte, această soluție nu mai este o mulțime de imputații, adică nu mai presupune jucarea *total cooperativă* a jocului și obținerea cîștigului *v(N).*

Coeziunea unui sistem și formarea coalițiilor. în încheiere considerăm util să notăm aici un interesant concept de soluție, propus de S. Guiașu și M. Malița în monografia *Triade* ([12], p. 147—158),

(p_2) pentru orice $x^* \in V$ nu există $x \in X$ astfel ca $f(x) > f(x^*)$; (p_3) pentru orice $y \in X - V$ există $x \in V$ astfel ca $f(x) > f(y)_t$ și $f(x) > f(y)$ pentru orice $x, y \in V$;

(P_4) V este o mulțime minimală cu proprietatea că pentru orice $y \in X - V$ există $x \in V$ astfel ca $f(x) > f(y)$;

(p_5) V este o mulțime maximală cu proprietatea că $f(x) \wedge f(y)$ pentru orice $x, y \in V$.

Desigur, lista aceasta nu este exhaustivă. Dacă introducem pe X relația binară tranzitivă $x > y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$ și transcriem formulările de mai sus, soluția este definită *prin oricare dintre următoarele proprietăți echivalente :*

(Pj) să se găsească un punct x^* e X astfel ca $x^* \succ x$ pentru orice $x \in X$, $x \neq x^*$;

(P_2) să se găsească mulțimea tuturor punctelor $x^* \in X$ nedominate, (adică cu proprietatea că nu există $x \in X$ astfel ca $x \succ x^*$)-

(P_3) să se găsească o mulțime V c X extern stabilă (adică cu proprietatea că pentru orice $y \in X - V$ există x e V astfel ca $x \succ y$) și intern stabilă (adică cu proprietatea că $x \not\succ y$ pentru orice $x, y \in V$) (o astfel de mulțime V se numește stabilă);

(P_4) să se găsească o mulțime extern stabilă minimală;

(P_5) să se găsească o mulțime intern stabilă maximală.

Să considerăm acum că > este o relație binară arbitrară

pe *X.* Extinzînd conceptul elementar de optimalitate, prin „problema punctelor optime în raport cu relația >" putem înțelege *oricare dintre problemele* (PJ — (P_s). Se arată cu ușurință că, dacă relația > este tranzitivă, atunci problemele (P_2)—(P_5) sînt toate echivalente și au fiecare cel mult o soluție *V.* Dacă însă relația >- nu este tranzitivă (și acesta este cazul relației de dominare între imputații), atunci cele cinci probleme nu mai sînt echivalente, ci definesc *concepte diferite de soluție* și, în plus, (P_3)—(P_6) nu mai au soluții unice.

Considerînd acum că > este relația de dominare pe mulțimea *X(v)* a imputațiilor unui joc *v,* alegerea unui concept de soluție sau a altuia depinde de posibilitatea de a demonstra, pentru clase de jocuri suficient de largi, *existența* soluției în sensul respectiv. Am discutat mai sus problemele (PJ și (P_2). Formularea (Pi) este tentantă, dar inconsistentă, deoarece imensa majoritate a jocurilor nu au soluție în acest sens. Conceptul (P_2) de soluție este cît se poate de rezonabil, dar, după cum am văzut, multe jocuri nu au soluție *xivă, netranzitivă* și nici totală. Pe scurt, imputația *x* domină impu- tația *y* (notat *x >- y)* dacă există o coaliție $ care, pe de o parte, preferă *x* în raport cu *y* (adică ^>*yi* pentru orice *i* ɢ *8)* și, pe de altă parte, deoarece < ^x_t<.*v{8),* are puterea să respingă im- ies fes
putația *y* (după cum am văzut mai sus). Această definiție a preferinței exprimă ambele aspecte ale principiului „cîștigului maxim în condițiile date", atît preferința pentru cîștiguri mai mari, cît și moderarea rezultînd din „condițiile date", anume că coaliția & poate obține în mod sigur *v(S),* dar, în general, nu mai mult.

Primul pas în direcția alegerii unei imputații „optime în raport cu relația de preferință >" este întrebarea dacă există o imputație care *să domine toate celelalte imputații* (impunîndu-se prin aceasta, în mod natural, ca soluție a jocului). Răspunsul este, pentru cvasito- talitatea jocurilor, negativ.

Pasul următor este întrebarea dacă există *imputații nedominate.* O imputație nedominată are proprietatea de stabilitate că nu există nici o coaliție care să aibă atît dorința cît și puterea să o respingă. Pe de altă parte, o imputație dominată nu poate fi acceptată ca „soluție", dacă există

imputații nedominate. Mulțimea imputațiilor nedominate se impune deci ca soluție a jocului, *dacă este nevidă.* Din păcate, se arată (teorema 8.4.2) că *mulțimea imputațiilor nedominate coincide cu nucleul* [adică faptul că imputația *x* este nedominată coincide cu condițiile (8)], și deci în numeroase jocuri (în particular în toate jocurile cu sumă constantă) *nu există imputații nedominate.*

Este deci necesar să definim în alt mod conceptul de optimalitate. Pentru a înțelege pasul următor — introducerea *mulțimilor stabile* ca „soluții" (în sensul lui von Neumann) — și a ilustra încă o dată originea ambiguității conceptului de optimalitate în teoria jocurilor, să facem o scurtă paranteză : să considerăm *singura* problemă în care conceptul de optimalitate are un sens precis, problema maximizării unei funcții *reale f,* definită pe o mulțime *X.* Prin „soluție" a acestei probleme înțelegem mulțimea

$$V = \{x^* \in X \mid f(x^*) > f(x) \text{ pentru orice } x \in X\},$$

care mai poate fi definită, *in mod echivalent,* prin oricare dintre următoarele proprietăți *echivalente* (pentru că mai departe vom folosi relații binare nereflexive, formulăm aceste proprietăți în termenii relației nereflexive > și nu în ai relației reflexive >):

(Pi) are proprietatea că / *(x*)>f(x)* pentru orice *xeX,*
*x=f= x** (proprietatea este echivalentă cu celelalte dacă / are un punct de maxim unic pe A);

Să vedem acum ce condiții rezonabile trebuie să satisfacă o repartiție $x = (x_r, \ldots, x_n)$ pentru a putea fi considerată „soluție" a jocului. Este natural să considerăm că *nici un jucător „rațional" nu va accepta să primească mai puțin decît poate obține prin forțele proprii,* adică să cerem ca

$$x_i \succ_i (\{i\}), \; i = 1,\ldots,n. \qquad (7)$$

Orice vector $x \in R^1$ care satisface (5) și (7) se numește **imputație.** Orice joc *esențial* [adică în care $v(N) > \sum_{i=1}^{r} v(\{i\})$] posedă o infinitate de imputații, și se pot impune noi condiții.

Nucleul jocului. Să întărim condițiile de „raționalitate individuală" (7), înlocuindu-le cu condițiile de „raționalitate de grup" că orice mulțime de jucători *ScX* primește cel puțin atît cit poate obține prin forțele proprii, adică

$$\mathbf{S} \quad x, > \text{î'(IS')} \text{ pentru orice \$ C JV.} \qquad (8)$$

Să observăm că dacă pentru o repartiție a? există o coaliție $ astfel ca $\mathbf{X}\ x_t < v(S),$ atunci jucătorii din $ pot respinge repartiția *x, ies*
deoarece ei pol obține mai mult decît le oferă aceasta, și deci jucătorii - S nu pot obține cîștigul • Repartițiile care satisfac

$$\mathbf{ieJ\text{-}s}$$

(8) sînt deci singurele care nu pot ridica obiecții, adică pentru care nu există nici o coaliție care să aibă nu numai dorința, ci și puterea să le respingă.

Mulțimea repartițiilor *x* care satisfac (5) și (8) se numește **nucleul** jocului și trebuie admisă ca soluție a jocului, *dacă este nevidă.* Din păcate în numeroase jocuri (în particular în toate jocurile cu sumă constantă esențiale, conform teoremei 8.4.3), *nucleul este vid.* Să notăm totuși că jocurile de *n* persoane cu nucleu nevid formează o submulțime *de măsură pozitivă* (cf. teorema 8.4.8).

Mulțimi stabile de imputații. Deoarece nucleul multor jocuri este vid, este necesar să slăbim condițiile din definiția acestuia. Renunțînd la condițiile discutabile de „raționalitate de grup "(8), păstrăm doar condițiile (5) și (7), adică mulțimea *X(v)* a impu- tațiilor jocului *v,* și căutăm o imputație sau o mulțime de imputații pe care să o putem considera ca „soluția" jocului.

Pentru compararea imputațiilor se introduce relația de **dominare** (v. definiția 8.3.1), care reprezintă o relație binară pe *X(v), nerefle-*

Teoria clasică a lui von Neumann și Morgenstern, de care ne ocupăm în continuare, consideră că nu poate fi admisă ca comportare optimă" (în sensul principiului cîștigului maxim) decît una care conduce la obținerea cîștigului total *v(N);* prin „soluție" nu se poate înțelege atunci decît un sistem de cîștiguri $x = (x_v \ldots x_n)$ e *II"* cu proprietatea că

$$n$$

i=i

sau o mulțime de astfel de vectori *x.* Ce alte condiții rezonabile trebuie să satisfacă repartiția *x* pentru a putea fi admisă de niște jucători „raționali" ? Evident, fiecare jucător *i* dorește ca partea x_i atribuită lui să fie cît mai mare, dar aceste dorințe trebuie să fie compatibile cu poziția *(puterea)* lui în joc. Observația este valabilă, mai general, pentru orice coaliție *S N (8=f?0).*

Puterea unei coaliții *8* este exprimată — în sensul discutat in § 3.3 — prin valoarea maximin pentru 8 în jocul necooperativ dintre <8 și A^T—8:

$$r(8) = \max_{Pi\ A\ \bullet'x-\ Ves\ /} \min\backslash\ I\ u' \mid dP_x\ dP_2 \qquad (6)$$

(unde maximul se ia după toate strategiile mixte P_1 pe mulțimea nv j. a strategiilor pure ale coaliției *S,* iar minimul se ia după toate i GS
strategiile mixte P_2 ale coaliției A^T — *8),* care reprezintă o margine inferioară a cîștigului pe care coaliția 8 și-l poate asigura prin forțele proprii, independent de acțiunea celorlalți jucători. Se poate obiecta că în multe cazuri coaliția 8 va putea obține mai mult ca *v(S),* de exemplu pentru că coaliția JV—8 nu se formează, sau pentru că jocul nu este cu sumă constantă, deci jocul dintre 8 și N—8 nu este antagonist și deci punctele de echilibru dau cîștiguri în general mai mari decît valoarea maximin ®(8). Astfel de obiecții conduc la noțiunea de joc *în forma funcției de partiție,* prezentată în § 10.3, în care marginea inferioară a cîștigului lui 8 se înlocuiește prin i/(8) definită prin 10.3.1.

Funcția *v* definită pe mulțimea părților lui *N* prin (4), (6) și r (0) - o se numește funcție caracteristică a jocului și are un rol
important în toate teoriile jocurilor cooperative. Existența mai multor teorii provine atît din existența mai multor posibilități rezonabile de definire a „soluției", cît și din diverse modificări ale însuși conceptului de joc.

tinue pe X, *respectiv Y, atunci fiecare jucător are o strategie optimă care folosește cel mult p* = min *(m, n) strategii pure* (v. [13], teorema 11.5); 2) *dacă* Y *este convexă și f este concavă în x pe X (pentru orice y* e Y), *atunci jucătorul* 1 *are*

cel puțin o strategie optimă pură (teorema 4.4.2) *și dacă* Y c *R, jucătorul* 2 *are o strategie optimă care folosește cel mult două strategii pure* ([13], teorema 12.5); 3) *dacă feste strict concavă în x pe X, atunci jucătorul* 1 *are o strategie optimă și aceasta este pură* ([13], teorema 12.2).

Numeroase asemenea proprietăți de *structură a strategiilor optime* sînt date în excelenta monografie a lui McKinsey [13], ca și în culegerile de articole *Contributions to the Theory of Games,* voi. I—IV (citate în bibliografia generală).

3. 5.2. JOCURI COOPERATIVE

Jocul T se numește **cooperativ** dacă regulile sale permit atît alegerea în comun a strategiilor, cît și transferul de cîștiguri (utilități) între jucători, în scopul cointeresării lor la o anumită acțiune comună.

Cîștigul total maxim pe care jucătorii îl pot obține acționînd împreună este evident

$$v(N) = \max_{x = 1}^{n} (\#) \qquad (4)$$

(se vede imediat că el nu poate fi îmbunătățit prin folosirea strategiilor mixte), iar strategia optimă comună este, bineînțeles, orice punct x e X pentru care se atinge acest maxim.

Problematica jocurilor cooperative este deci, după cum am notat și în § 3.4, total diferită de a jocurilor neeooperative : asupra noțiunii de strategie optimă nu încape nici o discuție (pentru acest motiv jocurile cooperative se mai numesc **nestrategiee),** determinarea acestora reducîndu-se la o problemă obișnuită de maximizare. Problema principală constă în definirea unui *mod rezonabil de repartizare a cîștigului total v (Nj* între jucători, în funcție de poziția lor în joc — și în acest sens trebuie să definim conceptul de soluție al unui joc cooperativ.

Desigur, este posibil ca jucătorii să nu poată cădea de acord asupra împărțirii cîștigului *v(N),* deci să nu acționeze în cooperare și, prin urmare, să obțină un cîștig total mai mic decît *v(N).* Această posibilitate este efectiv admisă în majoritatea teoriilor mai recente, între altele de teoria

Aumann și Maschler [9.1], în care *mulțimea de negociere* (v. § 9.2) este acceptată ca „soluție”.

Se vede imediat că *(x*, y*)* este un punct de echilibru pentru jocul T, dacă și numai dacă este **punel șa** al lui *f* pe *X* x *Y,* adică

$$/(\blacksquare^*,\ y^*Xf(x^*,\ y^*)\ y)$$

pentru orice *x e X, y e* Y. Existența soluției se reduce deci la existența unui punct șa al lui *f* pe A’ x I', ceea ce este echivalent cu egalitatea

$$\max_{\blacksquare cex\ \text{i/er}} \min\ f\ (x,\ y) = \min_{\text{î/er}} \max\ (f,\ y).$$

Teoremele care, în anumite condiții, stabilesc această egalitate (numite **teoreme minimax)** constituie deci teoreme de existență a soluției pentru jocul T. Printre rezultatele cele mai generale de acest tip se numără următoarea teoremă Sion-Kakutani [4.17; 4.19] : *dacă X,* Y *sînt mulțimi compacte convexe (în spații local convexe separate) și f este inferior semicontinuă și cvasiconvexă în y pe Y și superior semicontinuă și cvasiconcavă în x pe X, atunci f are cel puțin un punct șa pe X X* Y (deci jocul T are strategii optime pure). Alte teoreme minimax importante au fost date de Fan [4.15], Knesser [4.18], Stoer [4.22], Golstein [4.14] etc.

Toate aceste teoreme demonstrează existența strategiilor optime pure în anumite ipoteze de *convexitate.* în absența unor asemenea proprietăți, anumite ipoteze asigură totuși existența strategiilor optime mixte (adică existența unui punct șa al funcției *E* pe ′*x* X y). De exemplu, din teorema lui Glicksberg rezultă imediat că, *dacă X și* Y *sînt compacte separate și f este continuă pe X* x Y, *atunci jocul* T *are strategii mixte optime.* în particular rezultă că: 1) *orice joc antagonist finit are strategii mixte optime* (teorema 1.4.1); 2) *dacăX = =* Y = [0, 1] și *f este continuă, atunci există strategii mixte optime* (teoremele 4.3.1 și 4.3.2). în cartea de față sînt studiate în detaliu numai aceste două clase de jocuri antagoniste: jocurile *finite* și jocurile continue *pe pătratul unitate.*

Pentru a întregi imaginea cititorului asupra problematicii teoriei jocurilor antagoniste, mai notăm aici cîteva rezultate

caracteristice. Presupunem că *X* și Y sînt mulțimi compacte ale unor spații finit dimensionale și că *f* este continuă. Relativ la structura strategiilor optime, o problemă importantă este aceea a existenței pentru un jucător a unei strategii optime *pure* sau măcar *de tip finit* (adică care folosește doar un număr finit de strategii pure). Iată cîteva rezultate în acest sens : 1) *dacă f uncția de cîștig este separabilă, adică de* m »■
forma f(x, y) = S X *(x) (y)*$_7$ *unde ;; și* s_y *sînt funcții con-*
i=u=i pentru orice *i* = 1, ..., *n.* Spunem că *x* e X* este un punct de s-echilibru, unde ε >0, dacă

«‘(o?*) > sup ı?(.т* , ..*X„* a?*$_{+1}$, ..*x*)* - s ■’’i G *Xj*

pentru *i = 1, ..., n.* Numim **punct de echilibru în strategii mixte** al jocului T orice punct de echilibru al jocului f, extensia aleatoare a lui T. Numim **soluție** a unui joc necooperativ mulțimea tuturor punctelor sale de echilibru (în strategii pure sau mixte).

S-ar putea obiecta că, deoarece admitem că jucătorii acționează în vederea obținerii unui cîștig cît mai mare posibil, ar fi mai natural să numim soluție a jocului un sistem de strategii *x** e *X* cu proprietatea că *u’ (x*) =* max *(x)* pentru orice *i* = 1, ..., *n.* Observația *x^zX*
este justă, numai că, din păcate, pentru cvasitotalitatea jocurilor *nu există soluție în acest sens,* deoarece o asemenea soluție reprezintă un punct *x** care să maximizeze simultan toate funcțiile pe *X.*

O problemă fundamentală a teoriei jocurilor este de a demonstra *existența* soluției pentru clase de jocuri suficient de largi. O serie de alte rezultate se referă la *caracterizarea analitică a soluțiilor.* Scopul final îl constituie, desigur, obținerea de metode de calcul pentru determinarea unei soluții, adică pentru rezolvarea jocului.

În ceea ce privește existența punctelor de echilibru, se demonstrează că *orice joc de n persoane finit* (adică în care mulțimile X_t sînt toate finite) *posedă puncte de echilibru în strategii mixte* (teorema 8.1.1; pentru simplificarea scrierii, demonstrația se face doar în cazul *n* = 2, în teorema 7.1.2); *dacă, în plus, jocul este cu informație completă, atunci există puncte de echilibru în strategii pure* (teorema 1.4.5). Se cuvine să notăm aici, ca extensie a acestui rezultat, următoarea teoremă importantă a lui Glicksberg [4.13] : *dacă* X_t *(i = 1, ..., n) sînt spații topologice compacte*

separate și funcțiile de cîștig sînt toate continue pe X, atunci există puncte de echilibru în strategii mixte. Pentru alte teoreme de existențe a punctelor de echilibru sau s-echilibru vezi [4.16] și [4.20, 4.21],

O clasă importantă de jocuri necooperative o constituie jocurile **antagoniste,** adică jocurile de două persoane cu sumă nulă. Notînd cu *X,* Y mulțimile strategiilor pure și $u^1 = f$, $u^2 = — f$, forma normală a jocului se reduce la tripletul T = *{X, X,f},* unde *f: X* x X Y->*R.* Extensia aleatoare a jocului se reduce la jocul f *={X,* **Y,** *E},* unde *X, X* sînt mulțimile probabilităților (<r-aditive) pe *X* și respectiv *X,* și *(ŸP^X, P_2eX)*

P (Pi, $_{P_2)}$ = ț *f y)* (®) d-?2 (y)-

•'**JxF** la cîștiguri (minime!) (0,0), în procesul negocierilor unul dintre jucători va ceda presiunilor, admițînd propunerea celuilalt. Desigur, nu putem prevedea care va ceda. Trebuie deci să admitem ca soluție a jocului mulțimea formată din partidele (ff_x, $_{T_x)}$ și (<j_2, r_2).

Drept concluzii la analiza jocului (3) să observăm că în fiecare dintre cele trei cazuri am considerat rezonabil să numim „soluție" a jocului, sau comportare „optimă" a jucătorilor, *altceva,* deși am admis de fiecare dată principiul acțiunilor în scopul obținerii cîștigului maxim. Este evident că în baza acestui principiu nu putem introduce, în mod cît de cît unitar, conceptul de optimalitate, și aceasta nu numai pentru că, după cum am văzut în § 3.3, în condiții de nedeterminare *principiul poate fi interpretat în diverse moduri,* ci mai ales pentru că în conceptul de joc includem *situații de natură calitativ diferită.*

Este probabil clar că nu poate fi vorba de o teorie unitară a jocurilor, ci de mai multe teorii — a jocurilor necooperative, a celor fără plăți laterale, diverse teorii ale jocurilor cooperative etc. — cu concepte și metode diferite. Vom sintetiza în continuare problematica acestor teorii.

3.5. PROBLEMATICA TEORIILOR JOCURILOR

în acest paragraf considerăm un joc de *n* persoane T =

{*X^u'ji* $_{e\ N}$ *,* unde *Xf* este mulțimea strategiilor pure ale jucătorului *i* (notată *n*
mai sus SJ, $X = \mathbf{n}_{u^*:\ i=1}\ x_f$ este mulțimea partidelor posibile, iar -
X -> R este funcția de cîștig a jucătorului *i.*

3.5.1. JOCURI NECOOPERATIVE

Un joc se numește **necooperativ** dacă regulile sale interzic alegerea în comun a strategiilor și transferul utilității între jucători (plățile laterale).

Principiul de optimalitate unanim acceptat pentru jocurile necooperative este **principiul stabilității,** adică proprietatea **de** stabilitate (exprimată în definiția noțiunii de punct echilibru) că *nici un jucător nu are interesul să se abată unilateral de la strategia sa corespunzătoare.* Numim **punct de echilibru** (în sensul lui Nash) al jocului T un sistem de strategii *x* =* (a;*$_1$, ..., *x*) eX* cu proprietatea că *u* (x*) =* max *(x*, ...,* a?*_i , x_t, a?*$_{+1}$, ..., *x*)* întrebarea dacă considerăm (ct$_2$, $_{T2}$) ca soluție a jocului fiindcă este *punct de echilibru,* fiindcă *strategiile maximin* sînt $_{<J2}$ și respectiv $_{T2}$, sau fiindcă cr$_2$ și $_{T2}$ sînt singurele *strategii nedominate* ?) Că în general nu este așa se vede din următorul exemplu :

	$^{T}1$	$^{T}2$	$^{T}3$
	(6; 4)	(1; 5)	(1; 6)
a$_2$	(0; 2)	(2; 3)	(4; 1)

în care singurul punct de echilibru este (t>$_2$, r$_2$), nici o strategie nu este dominată și strategia maximin a jucătorului 1 este

Să notăm acum cîteva neajunsuri ale noțiunii de punct de echilibru. Chiar dacă există un punct de echilibru *unic,* în exemplul (3) am văzut că este posibil ca cîștigurile corespunzătoare să fie relativ mici; noțiunea de punct de echilibru nu prea reprezintă deci ceea ce am așteptat de la o „soluție optimă în sensul cîștigului maxim". Desigur, este posibil ca un joc să nu aibă *nici un ptinct de echilibru* (în strategii pure). Inexistența unui punct de echilibru este o deficiență gravă a unui joc, care se remediază prin introducerea strategiilor mixte; în paragraful următor vom vedea că, în condiții destul de generale, un joc are puncte de

echilibru *în strategii mixte.*

Desigur, este posibil ca un joc să aibă *mai multe puncte de echilibru.* Deoarece cîștigul unui jucător *depinde* (exceptînd jocurile antagoniste) *de punctul de echilibru,* fiecare jucător va prefera un anumit punct de echilibru. Rezultatul negocierilor nu poate fi prevăzut și trebuie să admitem ca „soluție" a jocului *mulțimea tuturor punctelor de echilibru.* De exemplu, jocul

	Ti	τ_2
^{a}l	(4; 1)	(0; 0)
®	(0; 0)	(1; 4)
2		

are două puncte de echilibru (și ($_{CT_2}$, $_{T_2}$). Jucătorul 1 va pretinde folosirea strategiilor (uj, $_{TJ,}$ iar jucătorul *2* va cere realizarea partidei (o_2, $_{T_2}$). Deoarece nerealizarea unui acord ar conduce

relativă, ordinea lor; un joc cu cîștigurile

τ_i	$\sim\hat{I}$
(b; n)	*(d; m) (a ; ț) (c; p)*

cu a> *b> c> d* și m> n> *p> q* este absolut echivalent cu cel analizat. vederea cointeresării jucătorilor la o anumită acțiune comună), atunci, chiar dacă regulile permit comunicarea între jucători, perechea de strategii («Ti, nu mai poate fi considerată ca optimă. Este adevărat că ea va aduce cîștiguri relativ mari, 5 și 4, dar suferă de următorul neajuns esențial: fiecare jucător în parte *este interesat* să părăsească strategia corespunzătoare, deoarece prin aceasta își mărește cîștigul (de exemplu jucătorul 1 își mărește cîștigul de la 5 la 10 dacă joacă <i_2 în loc de Gj) și, mai mult, *îi este permis să o facă,* deoarece chiar un eventual acord pentru folosirea strategiilor (<j_1, nu creează obligativități, jucătorii acționînd în continuare independent. Perechea de strategii ($_{G_{1;}}$ nu poate constitui deci obiectul unui acord. Poate constitui obiectul unui acord numai un sistem de strategii cu proprietatea că *nici un jucător nu își poate mări cîștigul prin abaterea unilaterală de la strategia sa corespunzătoare,* și

deci nici un jucător nu are interesul de a părăsi această strategie. Un sistem de strategii cu această proprietate de *stabilitate* se numește punct de echilibru (definiția exactă este dată în paragraful următor). în jocul de mai sus singurul punct de echilibru este perechea (G_2, T_2), care trebuie considerată ca soluție a jocului, deși cîștigurile corespunzătoare sînt relativ mici.

Să precizăm relația între punctele de echilibru și strategiile maxi- min ale diferiților jucători. Chiar dacă acestea din urmă sînt unice, ansamblul lor nu formează în general un punct de echilibru. Se arată cu ușurință că *orice punct de echilibru furnizează fiecărui jucător în parte un cîștig cel puțin egal cu cîștigul său maximin.* în acest sens orice punct de echilibru este, pentru fiecare jucător, *mai bun decît strategia maximin* și deci principiul cîștigului maxim implică căderea de acord a jucătorilor pentru folosirea strategiilor corespunzătoare unui punct de echilibru, nu folosirea strategiilor maximin. Să notăm totuși că valoarea maximin reprezintă o margine inferioară *sigură* a cîștigului, pe cînd valoarea corespunzătoare unui punct de echilibru este numai probabilă, obținerea ei fiind condiționată de *acordul tuturor jucătorilor asupra punctului de echilibru respectiv.* în exemplul de mai sus, în mod *accidental,* strategiile G_2 și T_2 sînt chiar cele furnizate de principiul maximin și, mai mult chiar, strategia G_2 *domină* G_x (adică pentru jucătorul 1 este recomandabil să joace G_2, indiferent ce face jucătorul 2) și strategia T_2 domină *'. (Aceasta ridică

♦) Nu mai încape deci nici o îndoială că strategiile (<r_2, T_2) sînt cele recomandate de teoria jocurilor. Paradoxul este evident: în timp ce o analiză teoretică destul de minuțioasă conchide prin a recomanda — în scopul „obținerii cîștigului maxim posibil" — acțiuni care conduc la cîștiguri relativ mici, doi jucători care, fără nici o analiză, ar juca amlndoi „greșit", aleglnd strategiile o, și respectiv T_v obțin cîștiguri mai mari t

Trebuie însă să subliniem că atributele „mici", „mari" sînt folosite impropriu pentru cîștiguri: mărimea acestora nu are nici o importanță, esențială este doar *mărimea lor* gului „maxim" pare să implice jucarea „cooperativă" a jocului. Pe de altă parte însă, cooperarea presupune din partea jucătorilor o anumită maleabilitate și moderare, exprimarea unor pretenții cit de cit rezonabile, ceea ce este evident în contradicție cu principiul intransigent al cîștigului „maxim".

Prin soluție (cooperativă) a jocului trebuie să înțelegem

deci o împărțire a cîștigului total (numită imputație), *(x*$_{If}$ *x*$_2$*)*, cu proprietățile x_1 4- x_2 = 12, ^>1, x_2*>2* (1 și 2 reprezintă respectiv cîș- tigurile pe care, conform discuției cazului (C_3), cei doi jucători le pot obține în mod sigur acționînd individual, și anume folosind strategiile cr_2 și, respectiv, $_{T_2}$; inegalitățile exprimă deci faptul că fiecare jucător va accepta cooperarea numai dacă prin aceasta obține *cel puțin cîștigul pe care îl poate obține prin forțele proprii.*

Există evident o infinitate de imputații. Care dintre acestea poate fi considerată, în mod rezonabil, ca echitabilă și acceptabilă pentru ambii jucători? La această întrebare nu se poate da, nici măcar pentru acest joc extrem de simplu, un răspuns *univoc* și *indiscutabil.* Rezultatul va depinde de psihologia și abilitatea de negociere a jucătorilor, noțiuni prea complicate și imprecise pentru a fi prinse într-un model matematic atît de simplu. Problema este incomparabil mai complicată în cazul unui joc cooperativ cu mai mult de doi jucători; în acest caz alternativa cooperării tuturor jucătorilor nu este acțiunea individuală, ci este posibilă gruparea jucătorilor în *coaliții,* care se înfruntă ca jucătorii unui joc necooperativ, dar care își împart între membrii lor cîștigul obținut ca într-un joc cooperativ. Cu toate aceste dificultăți, există cîteva concepte coerente de soluție a unui joc cooperativ, adică cîteva moduri de a recomanda ca „rezonabilă" o imputație sau o mulțime de imputații (dintre care urmează să fie aleasă una, în funcție de particularitățile jucătorilor, afinitățile dintre ei, abilitatea lor de a negocia etc.). Cîteva dintre aceste concepte sînt studiate în detaliu în cartea de față și vom reveni asupra lor, pe scurt, în § *3.o.* Notăm deocamdată că, pentru jocul considerat mai sus, atît teoria negocierii a lui Nash (§ 7.2), cît și teoria valorii Shapley (§ 9.1) recomandă ca „soluție" a jocului imputația cu .rj = 5,5 și x_2 = 6,5.

(C_2) Dacă jocul este un joe fără plăți laterale, adică regulile sale permit încheierea de acorduri ferme, dar exclud transferul cîștigurilor (plăți laterale), atunci jucătorii vor conveni desigur să folosească strategiile $_{CTJ}$ și, respectiv, care le aduc cîștigurile (5, 4). (Cîteva observații asupra acestui tip de jocuri sînt date în § 10.2.)

(C_3) Dacă jocul este necooperativ, adică regulile sale interzic acordurile ferme (și, implicit, plățile laterale, care au sens numai în lui, să discutăm următorul joc de două

persoane, extrem de simplu, în care fiecare jucător dispune de două strategii pure rr_x și $<r_2$, respectiv Ti și T_2, iar forma normală, adică cîștigurile (w^1 ($<T_{\{}$, $T_{,}$), W^2($<T$, . -)) sînt date de următorul tabel:

	$^{r}1\ ^{r}2$ '
° 1 ct 2	(5; 4) (0; (10; 0) (1 ; 2)

Admițând că scopul fiecărui jucător este *obținerea unui cîștig maxim posibil,* să vedem ce putem înțelege prin „soluție" a jocului (în strategii pure), adică ce pereche de strategii *(a,,* poate fi considerată în mod rezonabil ca „optimă" pentru cei doi jucători. (Pentru simplitate vom mărgini deocamdată discuția la *compararea strategiilor pure,* adică vom defini noțiunea de „soluție în strategii pure". Discuția este absolut similară în cazul strategiilor mixte.)

în funcție de prezența sau absența proprietăților (p_x) și (p_2), trebuie să distingem următoarele trei cazuri :

Cj) Dacă jocul este **cooperativ,** adică regulile sale permit atât *(pj* cît și (p_2), atunci probabil jucătorii vor cădea de acord să folosească perechea de strategii (crj, T_2), care le aduce cîștigul maxim pe care îl pot obține în comun (anume 12), adică pentru care se atinge maximul:

$$\max w^1\ (G_o + w^2\ (_{CTi}, {}^{T}J.$$
$$—i.\ \sim j$$

Problema nu constă deci în determinarea modului optim *de acțiune,* asupra căruia nu încap discuții, ci a *modului în care acest cîștig trebuie împărțit între cei doi jucători.* Fixarea cotelor celor doi jucători, și a_{-2}, se face în faza inițială a negocierilor și realizarea unui acord condiționează însăși acțiunea în comun: dacă jucătorii nu reușesc să cadă de acord asupra împărțirii sumei 12, pe care o pot obține acționînd în cooperare, atunci pur și simplu nu vor coopera, ci vor acționa individual, ca în cazul (C_3), renunțând la avantajul că regulile jocului *permit* cooperarea. Să notăm aici că afirmația „fiecare jucător acționează în scopul obținerii cîștigului maxim posibil" este nu numai vagă și neoperantă, dar și *contradictorie* : dacă fiecare jucător ar urmări să obțină cîștigul maxim posibil (adică 12), atunci ei

nu ar putea ajunge la nici o înțelegere, cooperarea ar fi exclusă, ceea ce ar implica jucarea „necooperativă" a jocului, ca în cazul (C_3), și deci obținerea unor cîștiguri mult mai mici. Deoarece prin cooperare se pot obține, în general, cîștiguri mai mari decît cele obținute prin acțiuni individuale, principiul ciști- (Problema este echivalentă cu a minimiza *P (f {x, y)<v),* interpretată de „risc" ca cîștigul să nu atingă nivelul *v). Principiul nivelului maxim* propune maximizarea nivelului *v* care poate fi atins cu o probabilitate a dată (aleasă suficient de mare, astfel încît un eveniment de probabilitate a să poată fi considerat ca „practic sigur"), adică

max *{v|P(f(x,y)* > v) > a, a? 6 *X},* a dat.

Să notăm că acest principiu este o reformulare a principiului maximin (1), obținută înlocuind verificarea „pentru orice *y* 6 Y" a condiției *f (x, y) > v* cu verificarea ei „cu probabilitatea a".

în concluzie la discuția de mai sus să observăm că nu putem aștepta existența unei teorii unitare a jocurilor, cel puțin pentru motivul că în probleme de decizie în condiții de nedeterminare sau incertitudine și în particular în jocuri, *există numeroase posibilități rezonabile de a înțelege optimalitatea.* Un al doilea motiv al aparentei incoerențe a teoriei jocurilor, discutat în paragraful următor, este acela că însuși conceptul de joc (în formă normală) este foarte larg, incluzînd situații de competiție *de naturi calitativ diferite.*

3.4. CLASIFICAREA JOCURILOR

Am arătat că forma normală a unui joc conține *aproape* întreaga informație necesară analizei teoretice a jocului. Pentru precizarea naturii jocului și a conceptului de soluție este însă necesar să indicăm, în plus, dacă regulile jocului *permit sau nu* următoarele elemente de cooperare :

p-f) încheierea de *acorduri ferme* (care devin obligatorii) între jucători pentru alegerea în comun a strategiilor (regulile jocului pot interzice, de exemplu, comunicarea între jucători; chiar dacă comunicarea este permisă și deci acordurile sînt posibile, ele nu implică de fapt obligații, de

exemplu pentru că regulile jocului exclud penalizările pentru nerespectarea unei înțelegeri);

p_2) plățile laterale, adică transferul de cîștiguri (utilități) între jucători, în scopul cointeresării lor la o anumită acțiune comună (dacă cîștigurile constau în sume de bani, putem admite în general transferabilitatea lor, cu rezervele notate în § 6.1; în alte jocuri însă transferabilitatea este evident exclusă).

Pentru a înțelege în ce măsură prezența sau absența acestor două proprietăți modifică *natura jocului* și întreaga problematică a analizei *mizării valorii medii* a cîștigului, deci soluția x_m este dată de

$$\max_{x \in X} Mf(x, y) = v_m. \qquad (2)$$

împotriva acestui principiu se ridică însă numeroase obiecții. Davis [10] este de părere că „cea mai slabă parte a teoriei jocurilor este, fără îndoială, presupunerea că un jucător va acționa întotdeauna astfel încît să-și maximizeze cîștigul său mediu". Trecînd peste observația că multe persoane, în special cele prudente, nu se comportă astfel (v. [12], p. 12, 13, 137), obiecția principală este următoarea : a ține seamă doar de valoarea medie înseamnă *a neglija o mare parte din informația disponibilă* (anume repartiția cîștigului *f(x,.))* și *a ignora variabilitatea cîștigului real.* Valoarea medie este o caracteristică importantă a unei variabile aleatoare, dar ea nu dă decît indicații vagi asupra valorii luate efectiv de variabilă. Dacă spunem că cîștigul mediu (corespunzător unei decizii *x)* este *v,* acest lucru nu înseamnă nici că cîștigul care se va obține efectiv este aproximativ *v,* nici că *v* este valoarea cea mai probabilă a acestuia. De fapt *nu putem, spune absolut nimic despre cîștigul care se va obține într-un joc.* Dacă jocul s-ar repeta de un număr suficient de mare de ori, *N,* în condiții identice, atunci (conform unei variante a legii numerelor mari), cu o probabilitate foarte mare, cîștigul total ar fi aproximativ *Nv*; în acest caz este desigur rațional să alegem în fiecare partidă strategia care maximizează pe *v (x).* Acesta este unicul argument teoretic în sprijinul criteriului valorii medii (exceptînd, desigur, avantajele de natură calculatorie). Dacă însă jocul se joacă o singură dată, atunci folosirea valorii medii a cîștigului drept criteriu este cu totul arbitrară.

Să notăm două moduri alternative de a înțelege

optimalitatea *', care — deși nu au fost aplicate încă în teoria jocurilor — folosesc într-un mod mai rezonabil informația disponibilă. Ambele pornesc de la observația că nivelul *v* este semnificativ pentru cîștigul real corespunzător deciziei *x* numai dacă probabilitatea *P (f (x, y) > v)* este suficient de mare (după cum am mai văzut, între cîștigul corespunzător deciziei *x* și *v{x)* nu există o legătuă prea strînsă). *Princi- piul probabilității maxime* (sau *riscului minim)* propune adoptarea deciziei *x* care maximizează probabilitatea ca cîștigul să atingă un nivel *v* dat :

max *P (f (x, y) > v), v* dat.

*> l'entru folosirea efectivă a acestor principii intr-o anumită problemă de decizie stochastică vezi Dragomirescu M. A/i *algorithm for the minimum risk problem of slochaslic programming.* Operations Research, voi. 20, no. 1, (1972).

A alege .r, atunci o margine inferioară a cîștigului său este min^i /ț^,?/), adică cîștigul obținut în situația cea mai nefavorabilă, cînd *y* ia valoarea pentru care se atinge acest minim; **decizia maximin** este decizia .r * care maximizează acest plafon inferior al cîștigului, adică pentru care se atinge maximul

$$v^* = \max_{x} \min_{y} f(x, y) = \max \{v \mid x \in X, f(x, y) > \text{pentru orice } y \text{ e } Y\}. \quad (1)$$

Această decizie este optimă în sensul următor : ea garantează un cîștig cel puțin egal cu *v* *, în timp ce pentru orice altă decizie *xE X* există riscul de a obține mai puțin decît *v* *. **Valoarea maximin** *v* * este deci cel mai mare cîștig pe care *A* îl poate obține *în mod sigur,* ndiferent de valoarea lui *y.*

Alegerea deciziei maximin *(minimax* în cazul „minimizării" lui /) constituie un *principiu de comportare,* caracterizat prin *prudență* și dorința de securitate împotriva celor mai proaste situații care se pot ivi. Apelul la prudență este, desigur, o chestiune de gust, dar, în afara unui mod rezonabil de comportare, principiul oferă și o măsură destul de obiectivă a „puterii" lui *A,* anume valoarea *v** pe care *A* o poate obține indiferent de condiții.

Desigur, principiul maximin nu constituie unicul mod rezonabil de comportare în fața nedeterminării. Să amintim,

de exemplu, *principiul regretului minim,* care preconizează alegerea deciziei *x* date de

$$\min \max \{\max / (x', y) — / (x, y)\}, \text{ zex } VEY\, X'GX$$

cu următoarea motivare: în situația ideală cînd *A* ar cunoaște valoarea lui *y* cîștigul său ar fi max/$_{6I}${ *(x', y);* se caută să se aleagă *x* astfel incit să se „minimizeze" abaterea $\max_x$- *Exf(x', y) -f(x,y)* față de această situație ideală („regretul"); pentru că această funcție depinde de *x și de y,* „minimizarea" în raport cu *x* trebuie înțeleasă în sensul minimax, conform celor de mai sus.

Condiții de incertitudine. Să presupunem acum că *y* este o mărime aleatoare, a cărei lege de probabilitate este cunoscută de *A.* Pentru orice decizie *XE X,* cîștigul lui *A* este deci o variabilă aleatoare, cu repartiția *P (f (x, y)<v)* și valoare medie *f (x, y)= v (x)* cunoscute.

Unul dintre principiile fundamentale în teoria deciziilor în condiții de incertitudine adoptat și în teoria jocurilor este *criteriul valorii medii,* potrivit căruia optimalitatea trebuie înțeleasă în sensul *maxi-* deciziilor) un *principiu de optimalitate.* Ca tot ce privește formalizarea deciziilor „raționale", acest principiu este discutabil; vom întîlni, chiar în teoria jocurilor, concepte alternative de „optimalitate", care nu se referă atît la maximizarea utilității, cît la atingerea unei situații *stabile* într-un anumit sens, sau la îmbinarea acestor două aspecte.

în orice caz, principiul utilității maxime nu definește întotdeauna, în mod univoc, decizia „optimă" : în condiții de *nedeterminare* sau *incertitudine,* adică de dependență de alți factori, necunoscuți sau cunoscuți doar probabilistic, conceptul comun de „maximizare" își pierde orice sens și *trebuie redefinit.*

Prin deeizie în condiții de nedeterminare înțelegem situația în care o persoană *A* trebuie să aleagă o „decizie" *xe X* cu dorința de a „maximiza" cîștigul (utilitatea) *f (x, y),* care depinde atît de decizia *x* aleasă, cît și de valoarea necunoscută a unui parametru *y e Y. (X* și Y sînt mulțimi abstracte date, iar / este o funcție cu valori reale, definită pe *X* x Y). în acest context *y* poate fi o valoare fixă, dar complet necunoscută, sau poate fi ales din mulțimea Y de o altă persoană (independentă de *A),* rațională [adică care acționează de asemenea în vederea atingerii unui scop, de

exemplu cu dorința de a „maximiza” o altă funcție, *g (x,* y)] sau nu (natura), sau poate fi o variabilă aleatoare, cu distribuție necunoscută sau cunoscută de către *A* (acest din urmă caz este referit ca decizie în **condiții de** incer-**titudine).**

Condiții de nedeterminare. Fără a discuta deocamdată natura parametrului *y,* adică presupunînd că *A nu cunoaște absolut nimic despre valoarea lui y,* ce putem înțelege prin decizie „optimă” a lui *A°!*

A maximiza cîștigul / în condițiile în care *A* controlează doar o parte din parametrii care îl determină este desigur o problemă incorect formulată și cu un sens extrem de imprecis. Admițînd că maximul cîștigului *f* pe *X* x Y se atinge pentru *x* = și *y = y°,* cîștigul *maxim* pe care l-ar putea obține *A* este desigur / *(x°, y°)* și pentru a-1 obține *A* ar trebui să aleagă decizia a?°, în speranța că se va întîmpla ca *y=y°.* Acesta este un *mod de comportare,* pe care l-am putea denumi „al riscului nebunesc” dar, desigur, un mod pueril de a înțelege „optimalitatea”, care nu poate fi considerat caracteristic unei persoane „rațională”.

Deși este greu de definit noțiunea de persoană „rațională” — aceasta presupune, între altele capacitatea de a analiza variantele, de a evalua riscurile și a încerca să le reducă — și cu atît mai greu de a-i preciza un mod univoc de comportament, există totuși cîteva moduri rezonabile de abordare a problemei puse. Unul dintre acestea este **principiul maximin,** motivat de următorul raționament: clacă alege strategia pură dacă bila extrasă este albă, și respectiv c>$_2$, dacă aceasta este neagră. Folosirea strategiilor mixte nu este deci legată de jucarea repetată a jocului, și nu se pune deci problema de *a admite sau nu* folosirea strategiilor mixte. Totuși, dacă jocul nu este repetat de un număr suficient de mare de ori, este discutabilă folosirea cîștigurilor medii *u'* drept criteriu al preferinței jucătorilor între diferitele strategii mixte (pentru obiecțiile împotriva valorii medii vezi § 3.3).

3.3. PRINCIPII DE COMPORTAMENT RAȚIONAL. NOȚIUNEA DE OPTIMALITATE ’

Noțiunea de optimalitate a deciziilor adoptate de elemente „raționale” este incomparabil mai greu de

formalizat decît celelalte componente ale conceptului de joc. Constituind singurul model matematic care analizează omul ca ființă „rațională", capabilă să analizeze rezultatul acțiunilor sale, să manifeste preferințe, să opteze și să acționeze în vederea atingerii unui scop într-o măsură cît mai completă în condiții de competiție, adică de interdependență cu alte elemente raționale, teoria jocurilor încearcă să modeleze și cea mai complicată formă de mișcare, mișcarea socială. Este de așteptat ca la baza unui astfel de model matematic să se găsească o definiție cît de cît riguroasă a unui element „rațional", a „comportamentului rațional" *(rațional behaviour),* adică principii — de natură metama- tematică, în special psihologică și sociologică — privitoare la *scopurile acțiunilor umane.* Scopul acțiunilor umane, ca și comportamentul considerat ca adecvat unui anumit scop, sînt însă insuficient de clare pentru a putea fi formalizate.

Inițial jocurile au fost considerate exclusiv din punctul de vedere simplist al maximizării unui cîștig (mediu, în cazul unor rezultate aleatoare) bănesc. Introducerea de către von Neumann a conceptului de *utilitate* — bazat pe un sistem de *axiome asupra preferințelor* (axiomele 6.1.2), care pot fi considerate ca descriind o persoană „rațională" — a permis extinderea considerabilă a conceptului de joc, admițînd ca prin „rezultat" al unui joc să nu se mai înțeleagă neapărat un cîștig în formă bănească, ci o mulțime mult mai diversă de evenimente, pentru care fiecare jucător manifestă preferințe, cvantificate prin utilitatea atașată acestora. în cele ce urmează, folosind uneori termenul mai intuitiv de „cîștig", *înțelegem întotdeauna că este vorba de utilități* (atașate diverselor rezultate).

Teoria utilității consideră că *scopul acțiunilor umane este maximizarea utilității,* oferind astfel teoriei jocurilor (și, mai general, teoriei

finită de strategii pure, , $u_m\}$, atunci mulțimea strategiilor

sale mixte este $= \{x \in R^m / x > 0, \pounds x_k = 1\}$, adică o strategie mixtă a lui *i* este un m-vector $x = (x_u \ldots ? x_m)$, cu $x_k > 0$ *(x* și $x_k = 1$; x_k reprezintă probabilitatea ca jucătorul *i* să folo-

=1,..., m) m

fc=l

seasc㠠strategia pur㠠a_k. Să observăm că strategia mixtă (1,0, ..., 0), care constă în alegerea sigură a strategiei pure se poate identifica cu c_{TJ} ; în acest sens avem deci c S».

în cazul folosirii strategiilor mixte âj e ju, cîștigul obținut de fiecare jucător *i* este o variabilă aleatoare, a cărei medie o notăm prin «‘(5), unde $a = \{'â_i\}_{ieN}$. Jocul r = {Si, «‘hex se numește **extensia aleatoare** a jocului T.

De exemplu, într-un joc de *n* persoane finit, dacă jucătorii folosesc respectiv strategiile mixte *x' = (xt)* e (i = 1, ..., *n),* atunci cîștigul jucătorului *i* este o variabilă aleatoare cu media

$$u^*(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{€= Si..A*n\ G\ S„} Y\, u^*(fc_{1;} \ldots, fc_{„}) x^l_{ki} \ldots x^*_{kn}.$$

în particular pentru $n = 2$, adică pentru jocul bimatriceal (A, *B)* în care jucătorii au *m,* respectiv *n* strategii pure, cîștigurile medii corespunzătoare strategiilor mixte *x* și *y* sînt

$$u^1\{x, y) = \sum_{i=13=1}^{m\ n} YIY^{a}\text{»}\ ^{x}i\ yi^{=}\ \hat{}y, \qquad (^{x}\text{> } y\text{>} = {}^{x\ IB}y\text{-}$$

Trebuie să subliniem faptul că folosirea unei strategii mixte nu este condiționată de *jucarea repetată a jocului* : strategia mixtă $x = (x_k, \ldots, x_m)$ pe = {1,..., *m}* nu trebuie înțeleasă în sensul că, jucînd *N* partide, cele *m* strategii pure trebuie folosite aproximativ de $A^{7\text{-}}$»!, .. .,Nx_m ori respectiv *’. O strategie mixtă este pur și simplu *un mod de selecționare a unei strategii pure, într-o partidă,* cu ajutorul (2 3 \ **-» -1**

pe S = {uj, $_{<T_2}$} înseamnă alegerea lui sau c_2 cu probabilitățile 2/5 și respectiv 3/5, de exemplu în modul următor : se amestecă 2 bile albe și 3 bile negre, se extrage apoi la întîmplare una dintre ele și se

*> Deși această afirmație este adevărată, intr-un anumit sens, dacă *N* este suficient de mare.

pură a unui jucător este un plan de acțiune, care precizează ce decizie trebuie aleasă la fiecare dintre mutările sale, în funcție de starea în care se află jocul.

Prin introducerea noțiunii de strategie pură, procesul alegerii deciziilor de către jucătorul *i* — în realitate secvențial — se reduce la *o singură alegere* a unui element din Alegerea de către fiecare jucător *i* e *N* a unei strategii pure e determină perfect desfășurarea jocului, adică *partida* realizată *a* = (o$_4$)ie.v, și deci cîștigurile (a) obținute de diverșii jucători *i* e *N.* Funcția *u,* definită pe mul- n
țimea S = S$_4$ a partidelor și cu valori în B^N, a cărei componentă i=i
i este cîștigul *u'* (a) obținut de jucătorul *i,* se numește **funcția de cîș- tig** a jocului. Numim joc de *n* **persoane în formă normală** sistemul r = {S$_4$, rd}i$_6$A-.

Teoria jocurilor se ocupă în esență *numai de jocuri în formă normală.* Evident, orice joc real, concret este un joc în formă extinsă, cu particularități și reguli specifice. Din aceste elemente se pot construi însă mulțimile S$_4$ și funcțiile *u',* adică forma normală a jocului, care, făcînd abstracție de particularitățile jocului real, înglobează totuși aproape întreaga informație necesară analizei teoretice a jocului, din punctul de vedere al adoptării deciziei.

Jocul r se numește **joe cu sumă nulă dacă** w'(cr) = **0** *n*
pen- •=i
tru orice *a e* S. Spunem **că** T este un **joc finit** dacă mulțimile strategiilor pure S$_n$..., S$_n$ sînt toate finite. Un joc finit de două persoane se mai numește **joc bimatriceal** deoarece, presupunînd că Si = {<r$_n$..., o$_m$} și S$_2$ = {T$_J$,. .., T$_„$}, forma sa normală se reduce la două matrice (de tip *m* X *n), A = (a$_{ij}$)* și *B =* unde *a$_{fj}$ = = u^1 (°i,* S), ^{b}*ij = ^{u2} (*« = 1, • • •, w ; j = 1,. . ., *n.* Un joc de două persoane, finit și cu sumă nulă (deci cu *A + B* = 0) se numește **joc matriceal,** deoarece forma sa normală se reduce la matricea A (subînțelegînd că cîștigurile jucătorului 2 sînt date de matricea *B = — A).*

în jocul T acțiunea jucătorului *i* se reduce la alegerea unei strategii pure Din motive care vor fi clarificate mai departe (anume,
deoarece în general nu există „soluție" în strategii pure), este necesar să lărgim clasa deciziilor admisibile de la strategii pure la strategii mixte. **O strategie mixtă** (sau **strategie aleatoare)** a jucătorului *i* este o probabilitate *' pe S$_{;}$. De exemplu, dacă jucătorul *i* are o mulțime

♦> Dacă S, nu este finită, prin strategic mixtă înțelegem o probabilitate *numărabil aditivă* pe (S_4, oBj), unde cB_4 este un a-corp de părți ale lui S_4. Dacă S_4 este un spațiu topologic, drept se ia corpul mulțimilor boreliene.

specificate printr-un ansamblu de reguli, aleg cîte o decizie (efectuează o acțiune, „mutare”) dintr-o mulțime dată de alternative. între altele, regulile jocului precizează situațiile în care jocul se termină; în fiecare astfel de situație, fiecare jucător primește o recompensă („cîștig”; asupra naturii acestuia vezi nota din p. 31), care depinde de întreaga desfășurare a jocului, deci de ansamblul acțiunilor tuturor jucătorilor. Se presupune că jucătorii sînt capabili să analizeze acțiunile lor și acționează în scopul obținerii unui *cîștig cît mai mare posibil.*

Aceste elemente, adică acțiunea unui număr de factori raționali, în condiții precizate prin regulile jocului, în scopul obținerii unor cîștiguri individuale cît mai mari, sînt formalizate în noțiunea de **joc in formă extinsă** (v. definiția 1.2.1). Majoritatea situațiilor, pentru care folosim în mod curent termenul de joc, au caracterul dinamic evidențiat în această definiție, adică se desfășoară în etape, în fiecare etapă acționînd un anumit jucător, precizat prin regulile jocului. Pentru acest motiv numeroase cărți de teoria jocurilor, printre care și cea de față, încep cu prezentarea acestui concept de joc. Vom vedea însă imediat că, din punctul de vedere al analizei teoretice a jocului, adică al determinării modului „optim” de acțiune al fiecărui jucător, atît caracterul dinamic cît și întregul ansamblu de reguli și particularități ale jocului *sînt neesențiale.* Se poate face abstracție de aceste particularități, concentrînd întreaga informație, conținută în ele, într-un cadru formal mult mai simplu, așa-numita **formă normală** a jocului, în care se pune exclusiv problema esențială a acțiunii *globale* a fiecărui jucător.

Acțiunea unui anumit jucător *i* e *N* constă în alegerea, la fiecare din momentele *tltj = 1, .. ^p^,* precizate prin regulile jocului, a unei decizii dintr-o mulțime de alternative Ij dată, în funcție de situația **' *{starea de informație) S{* la momentul (adică de ansamblul acțiunilor precedente ale tuturor jucătorilor, cunoscute de jucătorul *i).* Acțiunea *globală* a jucătorului *i* constă deci în alegerea unei funcții cu proprietatea că <r; *(8{)* e Ij pentru toți *j* = 1, ..., p_v O astfel de funcție se numește **strategic pură** a jucătorului *i* (v. definiția 1.3.1). Notăm cu Sj mulțimea tuturor strategiilor pure ale jucătorului *i.*

O strategie pură a jucătorului *i* reprezintă deci un

ansamblu de decizii, corespunzătoare tuturor mutărilor lui *i.* Intuitiv, o strategie

*> Nu este vorba de starea reală a jocului în momentul /'■ , pe care In general jucătorul nu o cunoaște, ci de *starea de informație* (sau *mulțimea de informație)* Sj a jucătorului *i,* adică o mulțime dată de stări reale (determinată de ansamblul cunoștințelor jucătorului *i* asupra acțiunilor precedente ale tuturor jucătorilor), între care jucătorul i nu poate distinge, în sensul că nu știe în care dintre aceste stări se află efectiv jocul, deși știe că starea reală este una dintre acestea.

ASUPRA FUNDAMENTELOR TEORIEI JOCURILOR ****>

(STUDIU INTRODUCTIV)

MIHAI DRAGOMIRESGU

3.1. OBIECTUL TEORIEI JOCURILOR

în majoritatea cazurilor omul este pus în situația că pentru atingerea unui anumit scop trebuie să adopte o decizie dintr-o mulțime dată de decizii posibile. Este naturală și caracteristică activității umane „rațională" tendința de a analiza și compara posibilitățile, în scopul alegerii unei decizii care să permită realizarea obiectivului propus într-o măsură cît mai bună. Deși folosim în mod curent termenul de decizie „optimă", în numeroase cazuri „optimalitatea" este un concept extrem de complex, care nu poate fi definit decît în limitele unui model matematic. Teoria modelelor matematice de adoptare a deciziilor — optime într-un anumit sens — constituie azi o ramură importantă a matematicii, numită *cercetare operațională.*

Teoria jocurilor este capitolul cercetării operaționale consacrat adoptării deciziilor în *situații de competiție* (situații *conflictuale* ††††*),* adică situații în care acționează

**** Cartea lui G. Owcn prezintă în mod relativ separat diverse capitole ale teoriei jocurilor, diverse clase concrete de jocuri, fără a insista în mod deosebit asupra originii și complexității conceptelor legate de modelarea activității umane „rationale". Avînd în vedere caracterul introductiv și didactic al cărții, nu se poate presupune că cititorul este familiarizat cu aceste probleme. Pentru acest motiv am considerat necesară includerea acestui articol în prezenta ediție. (A^{r}.7i.)

††††**> Termenul *competiție,* care înglobează atît elemente de conflict, cît și de cooperare, ni se parc mai potrivit pentru situația considerată decît ccl relativ uzual de *conflict.*

mai mulți factori „rațională” — fiecare urmărind un anumit scop — independenți în alegerea deciziilor proprii, dar dependenți prin rezultate, care depind de ansamblul tuturor deciziilor. Această situație este formalizată în conceptul matematic de *joc.*

3.2. CONCEPTUL DE JOC

Prin *joc* înțelegem, în sens vag, o situație în care acționează o mulțime $N = \{1, ..., n\}$ de elemente raționale (numite *jucători),* care, în mod succesiv și independent, într-o ordine și în condiții

Cred că cîteva dintre problemele tratate aici apar pentru prima dată într-o monografie, de exemplu jocurile diferențiale, mulțimea de negociere, jocuri cu un conlinuum de jucători. Am tratat în detaliu aceste probleme, lăsînd însă la o parte multe dintre aspectele lor mai complicate. Includerea lor în această carte trebuie să dea cititorului o idee despre numeroasele direcții noi din teoria jocurilor.

Citirea acestei cărți presupune oarecare cunoștințe de analiză matematică și rudimente de teoria probabilităților. Deși nu sînt absolut necesare, cunoștințe de teoria abstractă a măsurii ar fi folositoare. în sfîrșit, este absolut necesară o oarecare familiaritate cu proprietățile mulțimilor convexe și ale funcțiilor convexe. Pentru că însă în majoritatea universităților nu există încă cursuri asupra acestui domeniu, am inclus într-o anexă cîteva rezultate importante ale acestei teorii. De asemenea, sînt incluse fără demonstrație teoremele de punct fix ale lui Brower și Kakutani, care sînt deosebit de utile în numeroase capitole ale teoriei jocurilor.

Majoritatea problemelor propuse sînt luate din literatura de specialitate ; importanța lor constă în aceea că oferă contraexemple pentru unele conjecturi plauzibile, sau, alteori, schițează demonstrațiile unor teoreme, pe care nu am considerat posibil să le includ integral. Cîteva dintre ele sînt exerciții elementare.

Am încercat să ofer o bibliografie suficient de bogată, pentru ca cititorul să poată găsi cu ușurință toate detaliile care lipsesc din tratarea de față. Ea nu este în nici un caz exhaustivă; există publicate cîteva bibliografii exhaustive, în special în remarcabila carte a lui Duce și Raiffa „Jocuri și decizii” *șiîn Annals of MathematicsStudiesNo. 40.*

Vreau să mulțumesc Prof. Albert Tucker de la Universitatea Prin- ceton și Prof. Isbell de la Case Institute of Technology pentru numeroasele lor comentarii și sugestii pentru îmbunătățirea manuscrisului original. Cîteva exemple și exerciții au fost incluse la sugestia lor. Mulțumesc de asemenea lui Helen Glwozdz, Ellen Mooney și Catherine de Roșa pentru valorosul lor ajutor în dactilografierea manuscrisului. în sfîrșit, vreau să mulțumesc soției mele pentru încurajarea și încrederea în mine.

G.O.

PREFAȚĂ

în ultimii ani s-a simțit în mod evident nevoia unei cărți care să trateze în mod cuprinzător problemele joczirilor de două persoane și n *persoane din punct de vedere matematic. Sper că această carte va umple acest gol.*

Se poate considera că primele cinci capitole formează prima parte a cărții (teoria jocurilor de două persoane), iar ultimele cinci capitole formează a doua parte (teoria jocurilor de n *persoane). Cele două părți sînt independente una de alta și pot fi considerate fiecare ca un curs de un semestru. De asemenea, capitolele 1, 2, 6, 8 și 9 ar putea constitui un curs elementar (cu orientare teoretică).în general, un lector își poate constitui un curs alegînd după dorință subiectele, fără a fi obligat să folosească celelalte capitole. Mai notăm că majoritatea cărților consacrate teoriei jocurilor tratează probleme din capitolele 2, 3, S și 9.*

în prezentarea materialului am încercat să păstrez rigoarea matematică. în același timp am dorit să dau — ori de cîte ori a fost posibil — o interpretare heuristică argumentelor matematice, în special în partea a doua a cărții. Teoria jocurilor este de fapt o descriere matematică a unor anumite fenomene sociale, și ar fi săracă o carte care nu ar lega formularea matematică de situațiile sociale modelate.

în selecționarea materialului pentru această carte am urmărit prezentarea ideilor teoriei jocurilor la nivelul cunoștințelor studenților semestrelor mijlocii. Am considerat că cel mai bine este să încep cu unele subiecte

deja soluționate, ceea ce permite studentului satisfacția de a trata un capitol închis al științei. Acesta este într-adevăr cazul teoriei jocurilor de două persoane. Am evitat anumite părți ale acestei teorii, în special problema informației în jocuri în formă extinsă, deoarece, predînd acest curs, am avut întotdeauna impresia că introducerea acestor concepte nu facilitează în nici un mod prezentarea subiectului principal, ci dimpotrivă, o îngreunează, și ar trebui mai bine lăsate pentru o discuție la un nivel superior asupra teoriei jocurilor. Amînarea introducerii teoriei utilității pînă în a doua parte a cărții are același scop : deși este esențială pentru studiul jocurilor de n *persoane, ea s-a dovedit în general un obsctacol în tratarea jocurilor de două persoane cu sumă nulă.*

GAME THEORY

GUILLERMO OWEN
Associate Professor
of Mathematical Sciences
Rice University

Traducere și adaptare a primei ediții
in limba engleză

de MIHAI DRAGOMIRESCU

© 1968 by W. B. Saunders Company
Philadelphia, Pa. 18103

Guillermo Owen

TEORIA JOCURILOR

Traducere din limba engleză
de MIHAI DRAGOMIRESCU

Editura tehnică
București - 1974

Seria

BAZELE MATEMATICE ALE CERCETĂRII OPERAȚIONALE

Recenzie : prof. dr. **George Ciucu** Redactor : **Valentina Bucur** Tehnoredactor : **Elena Geru**
Coperta și supracoperta seriei : **Valentin Vișan**

Bun de tipar : 17.10.74; Coli de tipar :15,75;
Tiraj : 5925 exemplare; C.Z. 519.9

Tiparul executat sub comanda nr. 150 la întreprinderea Poligrafică Informația, str. Brezoianu nr. 23 — 25